Johdatus
rakenteisiin päättelyketjuihin

Ralph-Johan Back

Four Ferries Publishing

Johdatus rakenteisiin päättelyketjuihin

Ralph-Johan Back

Four Ferries Publishing

Yhteystiedot

Ralph-Johan Back, Tietojenkäsittelyopin professori
Åbo Akademi
Joukahaisenkatu 3 – 5, 50250 Turku, Suomi
mail: backrj@abo.fi, web: www.abo.fi/~backrj

Four Ferries Publishing

ISBN 978-952-7147-03-0

Esipuhe

Rakenteiset päättelyketjut on menetelmä, jonka tarkoituksena on auttaa matemaattisen argumentoinnin rakentamisessa, esittämisessä ja ymmärtämisessä. Menetelmä soveltuu yhtä hyvin niin matemaattiseen todistamiseen ja algebralliseen ja aritmeettiseen laskentaan kuin geometriseen konstruktioon ja yleiseen ongelmanratkaisuunkin. Menetelmää voi käyttää aina, kun ongelman ratkaiseminen vaatii useampia peräkkäisiä päättelyaskeleita. Sitä on käytetty matematiikan eri tasoilla yläkoulun ja lukion matematiikasta aina korkeakouluopetukseen ja matematiikkaa hyödyntävään tutkimukseen. Menetelmä perustuu kiinteään tapaan esittää matemaattinen argumentointi sekä yksinkertaisen logiikan käyttöön. Kiinteä muoto helpottaa todistusten ja laskujen ymmärtämistä ja näiden oikeellisuuden tarkistamista.

Tämän oppaan tavoitteena on näyttää, miten rakenteisia päättelyketjuja voidaan käyttää lukiotason matematiikan opetuksessa. Menetelmä kuvataan esimerkeillä, jotka vaihe vaiheelta laajentavat menetelmää uusilla piirteillä ja käsitteillä. Tämä opas on laajennettu versio aiemmasta oppaasta, joka julkaistiin nimellä *Matematiikkaa logiikan avulla: Johdatus rakenteisiin päättelyketjuihin* (Ralph-Johan Back, TUCS Lecture Notes 10, 2008).

Kiitossanat

Rakenteisia päättelyketjuja on kehitetty ja menetelmän soveltuvuutta opetuksessa on tutkittu läheisessä yhteistyössä TUCS Learning and Reasoning laboratorion jäsenten kanssa. Tutkimuslaboratorio on Åbo Akademin ja Turun yliopiston IT-laitosten yhteishanke. Haluan erityisesti kiittää seuraavia henkilöitä menetelmään liittyvistä kiintoisista ja antoisista keskusteluista sekä myötävaikuttamisesta menetelmän kehitykseen (lista on aakkosjärjestyksessä): Stefan Asikainen, Johannes Erikson, Matti Hutri, Tanja Kavander, Antti Lempinen, Linda Mannila, Mia Peltomäki, Viorel Preoteasa, Teemu Rajala, Tapio Salakoski, Petri Sallasmaa, Fredrik Sandström, Patrick Sibelius, Solveig Wallin ja Joakim von Wright. Suomen Akatemia ja Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö ovat rahoittaneet tämän julkaisun perustana olevaa tutkimusta.

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tässä tekstissä luodaan yleiskatsaus *rakenteisiin päättelyketjuihin.* Rakenteinen päättelyketju kirjoitetaan kiinteään esitysmuotoon, joka auttaa näkemään matemaattisen argumentoinnin kokonaisrakenteen, sen miten eri osat liittyvät toisiinsa. Päättelyketjun esitysmuoto vaatii, että jokainen askel ketjussa on perusteltava kertomalla, miksi tämä askel on matemaattisesti oikea. Päättelyaskeleissa käytetään loogisia symboleja ja logiikan sääntöjä eksplisiittisesti samaan tapaan kuin algebrallisissa laskuissa käytetään algebran notaatiota ja sääntöjä eksplisiittisesti. Tämä nopeuttaa argumentointia ja tekee siitä luotettavamman. Rakenteiset päättelyketjut antavat yhtenäisen esitysmuodon erilaisille matemaattisille päättelyille kuten todistuksille, aritmeettisille ja algebrallisille laskuille, geometrisille todistuksille, sanallisten tehtävien ratkaisuille ynnä muille. Menetelmä soveltuu kaikille matematiikan tasoille yläkoulusta lukioon, yliopistoon ja tutkimuksen tarpeisiin.

Tämän oppaan päämääränä on luoda yleiskuva rakenteisista päättelyketjuista käyttäen apuna lukiomatematiikasta otettuja esimerkkejä. Tekstin lukeminen ei vaadi muita perustietoja kuin perinteistä lukiomatematiikkaa.

Luku 2

Rakenteiset tehtävät

Rakenteinen tehtävä yhdistää matemaattisen tehtävän ja tehtävän ratkaisun yhdeksi yhtenäiseksi esitykseksi, jolla on kiinteä esitysmuoto. Rakenteinen tehtävä voi olla matemaattinen teoreema ja sen todistus, algebrallinen laskutehtävä ja sen ratkaisu, sanallinen tehtävä ja sen ratkaisu ja niin edelleen.. Tässä luvussa näytetään esimerkkien avulla, miten erilaiset matemaattiset ongelmat ja niiden ratkaisut voidaan esittää rakenteisina tehtävinä.

2.1 Rakenteinen lasku

Esitellään ensiksi rakenteisen tehtävän yksinkertainen erikoistapaus *rakenteisen laskun.* Tavanomainen tapa esittää algebrallinen lasku on muodostaa ketju yhtäsuuruuksia

$$t_0 = t_1 = ... = t_n.$$

Ketju vastaa väitteitä

$$t_0 = t_1 \text{ ja } t_1 = t_2 \text{ ja } \ldots t_{n-1} = t_n$$

Tästä ketjusta voidaan tehdä johtopäätös

$$t_0 = t_n,$$

koska yhtäsuuruus on transitiivinen. Seuraava esimerkki näyttää miten tällainen lasku kirjoitetaan r*akenteisena tehtävänä.*

Esimerkki 1. Osoitetaan, että summan ja erotuksen tulon kaava

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

on tosi.

Todistetaan tämä väite rakenteisella laskulla. Rakenteisessa laskussa jokainen lauseke kirjoitetaan omalle rivilleen. Jokaisen yhtälön perustelu kirjoitetaan myös omalle rivilleen. Perustelu kirjoitetaan yhtäsuuruusmerkin jälkeen yhtäsuuruuden muodostavien lausekkeiden väliin.

Kaavan todistus rakenteisena laskuna on seuraava:

$\bullet$ $(a-b)(a+b)$

$=$ {polynomien kertolaskusääntöjen mukaan}

$a^2 + ab - ba - b^2$

$=$ {lausekkeet ab ja $-ba$ kumoavat toisensa}

$a^2 - b^2$

$\square$

Todistus on kolmen algebrallisen lausekkeen ketju, joka voidaan yhdistää yhtäsuuruuksilla:

$$(a-b)(a+b) \;=\; a^2+ab-ab-b^2 \;=\; a^2-b^2$$

Tämä todistaa väitteen, sillä yhtäsuuruus on transitiivinen relaatio. Yhtäsuuruudet perustellaan polynomien ominaisuuksilla.

Perinteisesti tämä lasku kirjoitettaisiin seuraavasti:

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a^2+ab-ba-b^2 && \text{(polynomien kertolaskusääntöjen mukaan)}\\ &= a^2-b^2 && \text{(lausekkeet } ab \text{ ja } -ba \text{ kumoavat toisensa)}\end{aligned}$$

Tässä muodossa sekä kaavan että perustelun pitää mahtua samalle riville. Tämä johtaa käytännössä siihen, että perustelusta tulee lyhyt, usein vaikeaselkoinen ja se on helppo jättää pois itse todistuksesta. Tällöin kadotetaan helposti matemaattisen todistuksen perusidea, joka on lukijan vakuuttaminen siitä, että käytetyt askeleet ovat oikein ja että askeleet toisiinsa yhdistettynä johtavat haluttuun päämäärään. Mikäli perustelut jätetään pois, lukijan on itse keksittävä ne. Tämä tekee todistuksen lukemisesesta ja ymmärtämisestä turhan hankalaa. Samalla väärinymmärrysten ja virheiden mahdollisuus kasvaa, mikä taas hankaloittaa myöhempien argumentointien ymmärtämistä.

Pedagogiselta kannalta on erityisen tärkeätä, että kaikki perustelut kirjoitetaan selkeästi näkyville. Tällöin opettaja pystyy helpommin tarkistamaan sen, että opiskelija on todellakin ymmärtänyt tehtävään liittyvän teorian ja soveltanut sitä oikealla tavalla. Opiskelija pystyy myös itse paremmin tarkistamaan, että hänen esittämänsä lasku on oikein, käymällä läpi jokainen askel erikseen ja tarkistamalla, että perustelu on pitävä ja että askel on toteutettu oikein.

Rakenteisessa laskussa varataan kokonainen rivi (tarpeen vaatiessa useampi rivi) perustelujen käyttöön, minkä johdosta käytössä on tarpeeksi tilaa kunnolliselle perustelulle. Muoto pakottaa antamaan perustelun jokaiselle tehdylle askeleelle, sillä pois jätetty perustelu erottuu selvästi tyhjinä sulkeina.

Yleisesti lasku kirjoitetaan rakenteisena laskuna seuraavasti:

$\bullet$	t_0
$\sim_1$	{perustelu väitteelle $t_0 \sim_1 t_1$}
	t_1
$\sim_2$	{perustelu väitteelle $t_1 \sim_2 t_2$}
	t_2
$\vdots$	
	t_{n-1}
$\sim_n$	{perustelu väitteelle $t_{n-1} \sim_n t_n$}
	t_n
$\square$	

Esimerkissä kaikki relaatiot $\sim_i$ ovat yhtäsuuruuksia. Jokainen laskussa oleva väite perustellaan argumentilla, joka kirjoitetaan hakasulkujen sisään relaatiosymbolin jälkeen. Jokainen lauseke ja jokainen perustelu kirjoitetaan omalle rivilleen. Tällä tavoin saadaan tilaa pidemmille lausekkeille ja perusteluille. Tarvittaessa voidaan lausekkeelle tai perustelulle käyttää useampia peräkkäisiä rivejä.

Lasku kirjoitetaan kahteen sarakkeeseen: ensimmäiseen kirjoitetaan relaatiosymbolit (esimerkkitapauksessa "=") sekä erikoismerkit (tässä päättelyn aloittava "$\bullet$" ja sen päättävä "$\square$"), toiseen kirjoitetaan lausekkeet ja perustelut.

Lausekkeiden välissä voi olla mikä tahansa binäärinen relaatio $\sim$. Tavallisimmat ovat $\equiv$ tai $\Leftrightarrow$ (ekvivalenssi), $\Rightarrow$ (implikaatio) ja $\Leftarrow$ (käänteinen implikaatio) loogisille väitteille, sekä aritmeettisille ja algebrallisille väitteille järjestysrelaatiot kuten $=, <, >, \leq, \geq$. Käytettävien relaatioiden määrää ei ole rajoitettu pelkästään näihin, vaan muitakin relaatioita voidaan käyttää. Useimmiten valitaan transitiivisia relaatioita (kaikki edellä mainitut relaatiot ovat transitiivisia), mutta voidaan käyttää myös muita binäärisiä relaatioita lausekkeiden välissä. On myös mahdollista käyttää erilaisia binäärisiä relaatioita samassa johdossa. Esimerkiksi yhtäsuuruus voidaan yhdistää minkä tahansa relaation kanssa: jos $a \sim b$ pitää paikkansa (tässä $\sim$ on mielivaltainen binäärirelaatio) ja $b = c$, väite $a \sim c$ pitää myös paikkansa.

Esimerkeissä käytetään ekvivalenssirelaatiota $\equiv$ loogisten lausekkeiden välissä. Relaatio $p \equiv p'$, missä p ja p' ovat loogisia väitteitä, sanoo että p ja p' ovat yhtä tosia. Toinen yleinen merkintätapa ekvivalenssille on $\Leftrightarrow$, mutta notaatio $\equiv$ näyttää paremmin, että kyseessä on lauseiden totuusarvojen yhtäsuuruus. Ekvivalenssirelaatio on transitiivinen.

Esimerkki epätransitiivisesta relaatiosta on erisuuruus: $a \neq b$ ja $b \neq c$ ei välttämättä tarkoita sitä, että $a \neq c$. Yksinkertainen vastaesimerkki on $0 \neq 1$ ja $1 \neq 0$, jotka molemmat ovat totta, mutta $0 \neq 0$ ei ole totta. Täten useamman peräkkäisen erisuuruuden käyttö laskussa ei yleensä anna toivottua tulosta.

2.2 Rakenteinen tehtävä

Usein halutaan olla tarkkoja myös siitä, mikä tehtävä tulee ratkaista ja mitkä oletukset ovat voimassa. Tällöin käytetään yleistä *rakenteista tehtävää*. Seuraava esimerkki havainnollistaa tätä esitysmuotoa.

Esimerkki 2. Osoitetaan, että jos a,b ja c ovat ei-negatiivisia lukuja, pätee

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + a + b + c$$

Muotoilemme tehtävän, oletukset ja tehtävän ratkaisun rakenteisena tehtävänä.

$\bullet$	Osoita, että $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + a + b + c$, kun
$-$	$a,b,c \geq 0$
$\Vdash$	$(1 + a)(1 + b)(1 + c)$
$=$	$\{$kerrotaan keskenään lausekkeet $(1 + b)$ ja $(1 + c)\}$
	$(1 + a)(1 + b + c + bc)$
$=$	$\{$kerrotaan keskenään lausekkeet $(1 + a)$ ja $(1 + b + c + bc)\}$
	$1 + b + c + bc + a + ab + ac + abc$
$\geq$	$\{$vähennetään lausekkeesta ei-negatiivinen lauseke $ab + ac + bc + abc$ $\}$
	$1 + a + b + c$
$\square$	

Tehtävä joka halutaan ratkaista,

> ”Osoita, että $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + a + b + c$”

kirjoitetaan heti tehtävämerkin $\bullet$ jälkeen, toiseen sarakkeeseen. Seuraavilla riveillä luetellaan oletukset. Esimerkissä on vain yksi oletus,

> ”a,b,$c \geq 0$”.

Itse todistus on rakenteinen lasku joka alkaa merkin $\Vdash$ jälkeen, ja päättyy merkkiin $\Box$, niinkuin aikaisemmin.

Rakenteinen lasku on erikoistapaus rakenteisesta tehtävästä, jossa tehtävä ja oletuksia ei mainita. Se on lyhyempi esitysmuoto, joka sopii tilanteeseen, jossa asiayhteydestä on selvää, mitä halutaan todistaa ja mitkä oletukset ovat voimassa. Rakenteista tehtävää käytetään silloin, kun halutaan täsmällisesti ilmoittaa, mikä on ratkaistava tehtävä ja mitkä ovat oletukset. Käytännössä molempia tehtävämuotoja käytetään rinnakkain.

Rakenteisen tehtävän perusmuoto on seuraava:

$\bullet$	Tehtävä
-	oletus$_1$
$\vdots$	
-	oletus$_m$
$\Vdash$	{perustelu sille että lasku ratkaisee tehtävän annetuilla oletuksilla}
	t_0
$\sim_1$	{perustelu väitteelle $t_0 \sim_1 t_1$}
	t_1
$\sim_2$	{perustelu väitteelle $t_1 \sim_2 t_2$}
	t_2
$\vdots$	
	t_{n-1}
$\sim_n$	{perustelu väitteelle $t_{n-1} \sim_n t_n$}
	t_n
$\Box$	

Tehtävä, joka ratkaistaan, kirjoitetaan siis merkin "$\bullet$" jälkeen. Tämän jälkeen luetellaan oletukset jokainen omalla rivillään. Oletus merkitään merkillä "$-$". Jos on tarve viitata yksittäisiin oletuksiin, voidaan oletus myös merkitä kirjaimella kaarisulkujen sisällä (kuten (a), (b) , ...). Oletusten jälkeen tuleva todistus alkaa merkillä "$\Vdash$" (luetaan "todistetaan"). Todistus lopetetaan merkillä "$\Box$" (luetaan "mikä piti todistaa"). Todistusmerkin jälkeen voidaan samalle riville lisätä perustelu sille, miksi kyseinen lasku todistaa väitteen annetuilla oletuksilla. Käytetään kahta saraketta, joista ensimmäiseen kirjoitetaan erikoissymbolit kuten ”$\bullet$”, ”$\Vdash$” ,”$-$” ja relaatiosymbolit ja toiseen kirjoitetaan tehtävä, oletukset, lausekkeet ja perustelut.

Jatkossa tätä perusmuotoa lajennetaan vielä uusilla toiminnallisuuksilla, kuten alitehtävillä, faktoilla ja määritelmillä. Tämä perusmuoto toimii kuitenkin hyvin yksinkertaisemmissa tehtävänratkaisuissa.

2.3 Alitehtävät

Yllä kuvattu tehtävän esitysmuoto on riittävä silloin, kun jokaisen askeleen perustelu on suhteellisen yksinkertainen ja se voidaan tiivistää muutamalle riville. Kun perustelu on monimutkaisempi, on käytettävä *alitehtäviä* perusteluissa. Alla näytetään esimerkki siitä, miten tehtävässä käytetään alitehtäviä.

Esimerkki 3. Osoitetaan, että $m^2 - n^2 \geq 3$, kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja ja $m > n$. Tässä päättelyketjussa käytetään kahta aritmetiikan perussääntöä:

$$\begin{array}{rcl} \text{yhteenlasku on monotoninen} & : & a + b \leq a + b', \;\; \text{kun } b \leq b' \\ \text{kertolasku on monotoninen} & : & ab \leq ab', \;\; \text{kun } a \geq 0 \text{ ja } b \leq b' \end{array}$$

Väite todistetaan seuraavasti.

$\bullet$	Osoita, että $m^2 - n^2 \geq 3$, kun
$-$	m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, ja
$-$	$m > n$
$\Vdash$	$m^2 - n^2$
$=$	$\{$neliöiden erotus$\}$
	$(m - n)\,(m + n)$
$\geq$	$\{$kertolasku on monotoninen, oletusten mukaan $m - n \geq 0$ ja $m + n \geq 3\}$
	$(m - n) \cdot 3$
$\geq$	$\{$kertolasku on monotoninen, oletusten mukaan $m - n \geq 1$ ja $3 \geq 0\}$
	$1 \cdot 3$
$=$	$\{$lasketaan$\}$
	3
$\square$	

Todistuksen toinen askel on verrattain hankala. Siinä viitataan sääntöön tulon monotonisuudesta, mutta kyseistä sääntöä voidaan tässä tapauksessa käyttää vain, mikäli ehdot $m-n \geq 0$ ja $m+n \geq 3$ täyttyvät. Todetaan, että havaintojen perusteella m ja n täyttävät seuraavat ehdot:

- jos $m > n$ oletuksen mukaisesti, pätee $m - n > 0$ (joten myös $m - n \geq 0$),
- jos $n > 0$ oletuksen mukaisesti, pätee $n \geq 1$ ja
- jos $m > n \geq 1$ oletuksen mukaisesti, pätee $m \geq 2$ eli $m + n \geq 3$.

Nämä perustelut voidaan kirjoittaa itsenäisinä (loogisina) laskuina seuraavalla tavalla:

•	$m > n$	•	$m > n$ ja $n > 0$
$\equiv$	{aritmetiikka}	$\equiv$	{aritmetiikka}
	$m - n > 0$		$m \geq n + 1$ ja $n \geq 1$
$\Rightarrow$	{aritmetiikka}	$\Rightarrow$	{aritmetiikka}
	$m - n \geq 0$		$m \geq 2$ ja $n \geq 1$
$\Box$		$\Rightarrow$	{aritmetiikka}
			$m + n \geq 3$
		$\Box$	

Sen sijaan, että nämä lisäperustelut kirjoitettaisiin erillään todistuksesta, ne voidaan sisällyttää suoraan todistukseen *alitehtävinä*, jotka kirjoitetaan perustelun jälkeen sisennettyinä. Päättelyketjussa tehdyt oletukset ovat tällöin voimassa myös sitä seuraavissa alipäättelyissä. Myöhemmin näytetään, että alipäätelyt voivat myös sisältää omia oletuksia.

Esimerkki 4. Kirjoitetaan edellinen todistus uudelleen alitehtävien avulla.

$\bullet$ Osoita, että $m^2 - n^2 \geq 3$

$-$ kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, sekä

$-$ $m > n$

$\Vdash$ $m^2 - n^2$

$=$ {neliöiden erotus}

$(m - n)(m + n)$

$\geq$ {kertolasku on monotoninen, oletusten mukaan $m - n \geq 0$ ja $m + n \geq 3$}

- $\bullet$ $m > n$
- $\equiv$ {aritmetiikka}
- $m - n > 0$
- $\Rightarrow$ {aritmetiikka}
- $m - n \geq 0$
- $\square$
- $\bullet$ $m > n$ ja $n > 0$
- $\equiv$ {aritmetiikka}
- $m \geq n + 1$ ja $n \geq 1$
- $\Rightarrow$ {aritmetiikka}
- $m \geq 2$ ja $n \geq 1$
- $\Rightarrow$ {aritmetiikka}
- $m + n \geq 3$
- $\square$

$\ldots$ $(m - n) \cdot 3$

$\geq$ {kertolasku on monotoninen, oletusten mukaan $m - n \geq 1$ ja $3 \geq 0$}

$1 \cdot 3$

$=$ {lasketaan}

3

$\square$

Alla on vasemmalla yksinkertainen perustelu todistusaskeleelle $t \sim t'$, ja oikealla on perustelu jolla on alipäättelyitä:

$$\begin{array}{ll} & t \\ \sim & \{\text{perustelu}\} \\ & t' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & t \\ \sim & \{\text{perustelu}\} \\ & \textit{tehtävä}_1 \\ & \vdots \\ & \textit{tehtävä}_n \\ \ldots & t' \end{array}$$

Tässä perustelun tukena on n eri alitehtävää: $\textit{tehtävä}_1, \ldots, \textit{tehtävä}_n$, $n \geq 0$. Nämä sisennetään siten, että ne alkavat seuraavan sarakkeen kohdalta. Täten alitehtävät erottuvat selvästi varsinaisesta tehtävästä. Perustelu selittää, miksi $t\ R\ t'$ on tosi, kun jokainen alitehtävä on tosi. Koska alitehtävät voivat ajoittain olla pitkähköjä, merkitään todistettavana olevan relaation toisen lausekkeen (tässä tapauksessa t') kohdalla merkki "..." . Tämä helpottaa hahmottamaan sitä, mihin alitehtävät loppuvat ja mistä varsinainen tehtävä jatkuu.

2.4 Keskittyminen osalausekkeeseen

Monessa tapauksessa on tarpeellista muokata pitkiä ja monimutkaisia lausekkeita. Tällöin voidaan käyttää alilaskuja siihen, että keskitytään lausekkeen osaan, ja muokataan sitä kirjoittamatta koko lauseketta uudelleen jokaisessa laskun askeleessa.

Esimerkki 5. Sievennä lauseke $\sqrt{7+2\sqrt{11}}+\sqrt{7-2\sqrt{11}}$.

$\bullet$ Sievennä lauseke $\sqrt{7+2\sqrt{11}}+\sqrt{7-2\sqrt{11}}$

$\Vdash$ $\sqrt{7+2\sqrt{11}}+\sqrt{7-2\sqrt{11}}$

$=$ {neliöidään lauseke, sievennetään sitä ja otetaan sievennetystä lausekkeesta neliöjuuri}

- $\bullet$ $(\sqrt{7+2\sqrt{11}}+\sqrt{7-2\sqrt{11}})^2$
- $=$ {binomin neliö}
- $7+2\sqrt{11}+2\cdot\sqrt{7+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{11}}+7-2\sqrt{11}$
- $=$ {keskitytään osalausekkeeseen $2\cdot\sqrt{7+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{11}}$}
  - $\bullet$ $2\cdot\sqrt{7+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{11}}$
  - $=$ {kirjoitetaan saman juuren alle}
  - $2\cdot\sqrt{(7+2\sqrt{11})\cdot(7-2\sqrt{11})}$
  - $=$ {summan ja erotuksen tulo}
  - $2\sqrt{49-4\cdot 11}$
  - $=$ {sievennetään}
  - $2\sqrt{5}$
  - $\square$
- $\ldots$ $7+2\sqrt{11}+2\sqrt{5}+7-2\sqrt{11}$
- $=$ {sievennetään}
- $14+2\sqrt{5}$
- $\square$

$\ldots$ $\sqrt{14+2\sqrt{5}}$

$\square$

Esimerkissä käytetään alilaskua, joka vuorostaan sisältää toisen alilaskun. Alkuperäisenä ongelmana on sieventää neliöjuurilausekkeita. Alilaskussa sievennetään lausekkeen neliötä. Neliöjuuri sievennetystä lausekkeesta on silloin alkuperäisen ongelman ratkaisu. Tämän laskun alilaskussa sievennetään sitten monimutkaisen juurilausekkeen osa. Kun alilaskussa keskitytään vain lausekkeen osaan, on helpompi nähdä, mitä yleensä ollaan muokkaamassa. Lisäksi tehdään vähemmän virheitä, kun vältytään monimutkaisten lausekkeiden kopioinnista riviltä toiselle.

Tämänkaltaisten todistusten kirjoittamista ja lukemista helpottaa, jos käytetään tietokonetta ja editori tukee sisentämistä sekä on alipäättelyjen näyttämiseen ja piilottamiseen kykenevä (ns. outlineri tai outlining editori). Tällöin voidaan itse päättää siitä, millä tarkkuudella todistusta tarkastellaan. Piilottamalla alipäättelyt saadaan parempi yleiskuva todistuksesta, ja niiden näyttäminen puolestaan antaa yksityiskohtaisemman kuvan todistuksesta. Jos työskennellään käsin kynän ja paperin kanssa, tällaista mahdollisuutta ei tietenkään ole, mutta siinä tapauksessa alilaskut voi kirjoittaa erikseen. Kun alilasku on piilotettu, merkki "…" näyttää, että perustelulla on piilotettuja laskuja.

2.5 Sanalliset tehtävät

Sanallisissa tehtävässä luodaan ensin kuva tilanteesta, jonka jälkeen annetaan tehtäväksi jonkin tilanteeseen liittyvän väittämän todistaminen tai kehotetaan laskemaan jotain. Rakenteisissa päättelyketjuissa tilanne kuvaillaan oletuksilla, jotka ovat voimassa todistuksessa. Seuraavassa esimerkissä oletukset on merkitty kirjaimilla siksi, että niihin on helpompi viitata päättelyketjussa. Ensimmäinen tehtävä on mekaniikan alalta.

Esimerkki 10. Vuoden 1960 jälkeen nopeimman junayhteyden matka-aika Helsingin ja Lappeenrannan välillä on lyhentynyt 37 prosenttia. Laske, kuinka monta prosenttia keskinopeus on tällöin noussut. Oletetaan, että radan pituus ei ole muuttunut.

Kirjoitetaan ensiksi tehtävän uudestaan lisäämällä todistuksessa käytettäviä merkintöjä. Tehtävä uudelleenkirjoitettuna on seuraavanlainen: Vuoden 1960 jälkeen nopeimman junayhteyden matka-aika t' Helsingin ja Lappeenrannan välillä on lyhentynyt 37 prosenttia verrattuna alkuperäiseen matka-aikaan t. Laske, kuinka monta prosenttia p keskinopeus v' on noussut alkuperäiseen keskinopeuteen v verrattuna. Oletetaan, että radan pituus s ei ole muuttunut.

• Laske nopeuden muutosprosentti p, kun

$-$ $t' = 0.63 \cdot t$

$\Vdash$ {transitiivisyys, likiarvon määrittäminen}

p

$=$ {nopeuden muutosprosentin määritelmä}

$$\frac{v' - v}{v}$$

$=$ {fysiikka: keskinopeuden määritelmä $v = \frac{s}{t}$, jossa s on kuljettu matka ja t on matka-aika}

$$\frac{\frac{s}{t'} - \frac{s}{t}}{\frac{s}{t}}$$

$=$ {sievennetään}

$$\frac{\frac{s}{t'}}{\frac{s}{t}} - 1$$

$=$ {sievennetään murtoluvut}

$$\frac{s \cdot t}{s \cdot t'} - 1$$

= {sievennetään, oletus}

$\frac{1}{0,63} - 1$

≈ {lasketaan lausekkeen likiarvo}

0.59

= {muutetaan prosenteiksi: $x\% = \frac{x}{100}$}

59%

□

Vastaus: keskinopeus on noussut 59%

2.6 Kysymykset ja vastaukset

Matemaattisessa tehtävässä on usein löydettävä jokin arvo x, joka toteuttaa annetut ehdot, tai on löydettävä kaikki arvot x, jotka toteuttavat annetut ehdot. Yhtälön ratkaiseminen on esimerkki tällaisesta yleisestä tehtävänannosta. Useimmiten ei sanota eksplisiittisesti, minkä muuttujan suhteen yhtälö tulisi ratkaista, koska tämä on ilmeistä (muuttuja x), mutta jos yhtälössä on useita eri muuttujia ja vakioita, voi tehtävä tässä muodossa olla moniselitteinen.

Rakenteisissa päättelyissä tehtäväksianto voidaan täsmentää halutulla tavalla, kun •- symbolin jälkeen ilmoitetaan minkä muuttujan arvoa haetaan ja mitä ehtoja sen tulee toteuttaa. Vastaus annetaan □- symbolin jälkeen. Seuraavassa sanallisessa tehtävässä näytetään miten tämä toimii.

Esimerkki 14 Laudan leveys on 95 mm ja pituus 1,6 m. Siitä sahataan samanpituisia paloja, jotka asetetaan rinnakkain siten, että muodostuu neliön muotoinen levy. Miten pitkä voi neliön sivu enintään olla?

Olkoon n palojen lukumäärä, $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoon x palojen pituus. Silloin on voimassa $nx \leq 1600$, missä pituusyksikkö on millimetri. Lisäksi tiedämme, että $x = 95n$, koska palat muodostavat neliön. Tilanne kuvataan Kuviossa *2.1* (huomaa, että yksi pala voi jäädä yli) .

Nyr x:n arvo halutaan maksimoida.

• Hae $n \in \mathbb{Z}_+$ joka maksimoi arvon $x = 95n$ ja toteuttaa ehdon $nx \leq 1600$

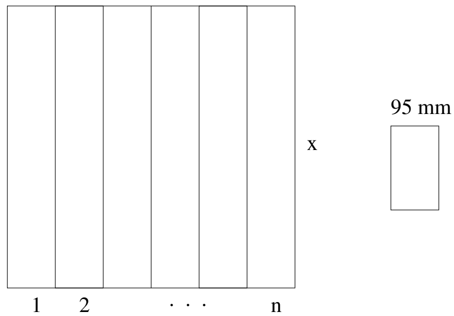
$\Vdash$ n maksimoi arvon $x = 95n$, ja $nx \leq 1600$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$

≡ {yksinkertaistetaan ehtoa}

  • Sievennetään $nx \leq 1600$, kun

  - $x = 95n$

  $\Vdash$ $nx \leq 1600$



Kuva 2.1: Neliö ja yli jäänyt laudanpala.

$\equiv$ {käytetään oletusta $x = 95n$}

$n \cdot 95n \leq 1600$

$\equiv$ {sievennetään}

$n^2 \leq 1600/95$

$\equiv$ {ratkaistaan olettamalla, että $n \in \mathbb{Z}_+$; $16 \leq \frac{1600}{95} < 25$}

$n \leq 4$

$\square$

... n maksimoi arvon $x = 95n$, ja $n \leq 4$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$

$\equiv$ {x on aidosti kasvava n:n funktio}

$n = 4$

$\square$ $n = 4$

Toisin sanoen suurin mahdollinen leveys on $4 \cdot 95 = 380$ (mm).

Luku 3

Ongelman ratkaiseminen askel askeleelta

Edellisessä luvussa on näytetty, miten rakenteiset tehtävät soveltuvat yksinkertaisten matemaattisten tehtävien ratkaisemiseen. Mutta kun ratkaisu venyy pidemmäksi ja monimutkaisemmaksi, tarvitaan menetelmiä, joilla ratkaisu voidaan jakaa pienempiin osiin. Lisäksi tarvitaan selkeä strategia sille, miten tehtävää lähdetään ratkaisemaan.

Matematiikassa on periaatteessa kolme perusstrategiaa, jolla monimutkaisempi ongelma ratkaistaan askel askeleelta: algebrallinen lasku, eteenpäintodistus ja taaksepäintodistus. Olemme edellisessä luvussa näyttäneet, miten ongelmia ratkaistaan laskujen avulla. Eteenpäin todistamisessa edetään askel askeleelta siten, että luetellaan jono fktkoja jotka seuraavat oletuksista ja edellisistä faktoista, ja jotka auttavat ongelman ymmärtämisessä ja ratkaisemisesssa. Jatkamme kunnes faktoja on kerätty niin paljon, että pystymme ratkaisemaan ongelman suoraan, laskulla tai vielä yhdellä faktalla. Taaksepäin todistaminen taas lähtee alkuperäisestä ongelmasta ja yrittää redusoida tämän joukkoon yksinkertaisempia ongelmia siten, että näiden ratkaisu antaa ratkaisun myös alkuperäiselle ongelmalle. Yksinkertaisemmat ongelmat ratkaistaan suoraan, esimerkiksi laskulla, tai sitten ne redusoidaan vielä yksinkertaisempiin ongelmiin, jne.

Rakenteiset päättelyketjut mahdollistavat kaikkien näiden ratkaisustrategioiden käyttämisen samaan aikaan, ratkaisun eri osissa. Tässä luvussa näytetään, miten ratkenteisessa tehtävässä voidaan käyttää eteenpäintodistusta ja taaksepäintodistusta.

3.1 Eteenpäin todistaminen

Tehtävää ratkaistaessa on usein sellainen tilanne, että ei voida suoraan lähteä laskemaan haluttua tulosta. Ensiksi on valmisteltava laskua kirjaamalla joitakin *faktoja*, jotka seuraavat suoraan oletuksista ja joita tarvitaan laskussa tai muiden faktojen todistuksissa. Fakta kirjoitetaan seuraavalla tavalla:

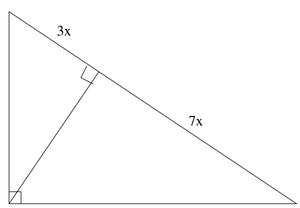
+	{perustelu}
	väittämä

Faktat merkitään ”+”-merkillä toisin kuin oletukset, jotka merkitään ”−”-merkillä. Faktalla pitää aina myös olla perustelu, joka kertoo millä tavoin fakta seuraa oletuksista ja aiemmista faktoista. Perustelu kirjoitetaan ennen havainto. Perustelu voi olla yksinkertainen tai perustelun voi kuulua alitehtäviä. Faktat voidaan numeroida, jolloin numerot kirjoitetaan hakasulkuihin (esim “[1]”, “[2]” jne.).

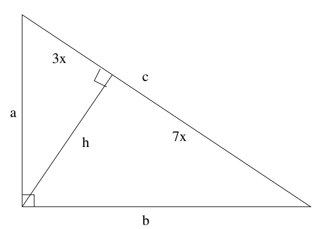
Osoitetaan ensin esimerkin avulla, kuinka geometriassa voidaan käyttää havaintoja päättelyketjuissa.

Esimerkki 11 Hypotenuusan vastainen korkeus suorakulmaisessa kolmiossa jakaa hypotenuusan suhteessa 3 : 7. Määritä kateettien pituuksien suhde.

Aloitetaan piirtämällä kuvio, joka kuvaa ongelmaa:



Seuraavassa kuviossa on nimetty kateetit (a ja b), hypotenuusa (c) sekä korkeus (h).



Näitä merkintöjä käytetään todistuksessa. Itse todistus kirjoitetaan seuraavan mallin mukaan. Aluksi kirjataan joitakin yksinkertaisia faktoja, jotka seuraavat suoraan kuviosta. Näiden perusteella voidaanimme todistaa joitakin lisäfaktoja. Lopuksi lasketaan kateettien pituuksien suhde näitä faktoja hyväksi käyttäen.

• Määritetään suhde $\frac{a}{b}$

[1] {kuviosta}

$c = 10x$

[2] {kuvio ja Pythagoraan lause}

$h^2 + 9x^2 = a^2$

[3] {kuvio ja Pythagoraan lause}

$h^2 + 49x^2 = b^2$

[4] {kuvio ja Pythagoraan lause}

$a^2 + b^2 = 100x^2$

[5] {Eliminoidaan h}

• [2] $\wedge$ [3]

$\equiv$ {havainnot [2] ja [3]}

$h^2 + 9x^2 = a^2 \wedge h^2 + 49x^2 = b^2$

$\Rightarrow$ {vähennetään ensimmäinen yhtälö toisesta ja sievennetään}

$b^2 - a^2 = 40x^2$

$\square$

... $b^2 - a^2 = 40x^2$

[6] {Nyt määritetään b^2}

• [4] $\wedge$ [5]

$\equiv$ {havainnot [4] ja [5]}

$a^2 + b^2 = 100x^2 \wedge b^2 - a^2 = 40x^2$

$\Rightarrow$ {lasketaan yhtälöt yhteen}

$2b^2 = 140x^2$

$\equiv$ {jaetaan puolittain 2:lla}

$b^2 = 70x^2$

$\square$

... $b^2 = 70x^2$

[7] {Nyt määritetään a^2}

• [4] $\wedge$ [6]

$\equiv$ {havainnot [4] ja [6]}

$a^2 + b^2 = 100x^2 \wedge b^2 = 70x^2$

$\Rightarrow$ {sijoitetaan toinen yhtälö ensimmäiseen}

$a^2 + 70x^2 = 100x^2$

$\equiv$ {ratkaistaan a^2}

$a^2 = 30x^2$

$\square$

$\ldots$ $a^2 = 30x^2$

$\Vdash$ $\frac{a}{b}$

$=$ {neliöjuuren määritelmä, a ja b ovat positiivisia lukuja}

$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$

$=$ {havainnot [6] ja [7]}

$\sqrt{\frac{30x^2}{70x^2}}$

$=$ {supistetaan ja sievennetään}

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\square$

Seuraava esimerkki analyyttisestä geometriasta antaa toisen esimerkin siitä, miten faktoja käytetään päättelyketjuissa. Tässä esimerkissä oletukset tunnistaa kirjaimista ja faktat numeroista.

Esimerkki 12. Määritä se paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ piste, jossa tangentin suuntakulma on 45°.

Ongelma muotoillaan uudelleen seuraavasti: Määritä se paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ piste (x_0, y_0), jossa tangentin suuntakulma α on 45°.

• Määritä piste (x_0, y_0) silloin, kun

(a) $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja

(b) paraabelin tangentilla on pisteessä (x_0, y_0) suuntakulma $\alpha = 45°$

[1] {etsitään derivaatta pisteessä x_0}

• paraabelin tangentilla on pisteessä (x_0, y_0) suuntakulma 45°

$\equiv$ {kulmakerroin k saadaan suuntskulmasta α kaavalla $k = \tan\alpha$}

tangentin kulmakerroin pisteessä (x_0, y_0) on $\tan 45°$

$\equiv$ {$\tan 45° = 1$}

tangentin kulmakerroin pisteessä (x_0, y_0) on 1

$\equiv$ {kulmakerroin saadaan funktion derivaatasta}

$f'(x_0) = 1$

$\square$

$\ldots \quad f'(x_0) = 1$

[2] {määrätään muuttujan x_0 arvo, havainto [1]}

- $f'(x_0) = 1$

$\equiv$ {oletus (a), lasketaan derivaatta}

$2x_0 - 2 = 1$

$\equiv$ {ratkaistaan x}

$x_0 = \frac{3}{2}$

$\square$

$\ldots \quad x_0 = \frac{3}{2}$

$\Vdash \quad (x_0, y_0)$

$=$ {havainto [2]}

$\ldots \quad \left(\frac{3}{2}, y_0\right)$

$=$ {määrätään muuttujan y_0 arvo oletuksen (a) avulla}

$\left(\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 3\right)$

$=$ {lasketaan}

$\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

$\square$

Etsitty piste on siis $(x_0, y_0) = (\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$.

Seuraavassa on yleinen muoto rakenteiselle tehtävälle jossa käytetään faktoja.

•	Tehtävä
-	oletus_1
$\vdots$	
-	oletus_m
$+$	{perustelu faktalle}
	fakta_1
$\vdots$	
$+$	{perustelu faktalle}
	fakta_m
$\Vdash$	{perustelu sille että päättelyketju ratkaisee tehtävän annetuilla oletuksilla ja faktoilla}
	t_0
$\sim_1$	{perustelu väitteelle $t_0 \sim_1 t_1$}
	t_1
$\sim_2$	{perustelu väitteelle $t_1 \sim_2 t_2$}
	t_2
$\vdots$	
	t_{n-1}
$\sim_n$	{perustelu väitteelle $t_{n-1} \sim_n t_n$}
	t_n
$\square$	

3.2 Taaksepäin todistaminen

Taaksepäin todistaminen ei vaadi uusia mekanismeja, vaan se voidaan toteuttaa alitehtävien avulla. Seuraavassa esitellään kaksi esimerkkiä, joissa annettu tehtävä ratkaistaan redusoimalla alkuperäinen tehtävä suoraan alitehtäviksi. Tällöin ei tehtävän tasolla tarvita mitään laskua, ja tämä voidaan jättää pois.

Ensimmäinen esimerkki on tapaustodistus (*proof by cases*). Kyseisessä todistustyypissä tunnistetaan ensiksi kaikki mahdolliset tapaukset, jonka jälkeen haluttu väittämä osoitetaan todeksi niissä jokaisessa. On tärkeää, että käsitellyt tapaukset kattavat kaikki mahdollisuudet.

Esimerkki 16. Todistetaan, että epäyhtälö $|x + 1| > 1$ on tosi väliin $[-2,0]$ ulkopuolella.

- Osoita, että $|x+1| > 1$, kun

(a) $x > 0 \vee x < -2$

$\Vdash$ {tapaussääntö, oletuksen (a) mukaan riittää tarkastella tapaukset $x > 0$ ja $x < -2$erikseen}

- Osoita, että $|x+1| > 1$, kun

$-$ $x > 0$

$\Vdash$ $|x+1|$

$=$ {itseisarvon määritelmä, oletus $x > 0$}

$x+1$

$>$ {oletus}

$0+1$

$=$ {lasketaan}

1

$\square$

- Osoita, että $|x+1| > 1$, kun

$-$ $x < -2$

$\Vdash$ $|x+1|$

$=$ {itseisarvon määritelmä, oletus $x < -2$}

$-(x+1)$

$=$ {sievennetään}

$-x-1$

$>$ {oletus $x < -2$ eli $-x > 2$}

$2-1$

$=$ {lasketaan}

1

$\square$

$\square$

Induktiotodistus on toinen esimerkki, jossa redusointi on hyvä tapa käsitellä ongelmaa. Induktiotodistuksessa käsitellään kahta tapausta: perusaskelta ja induktioaskelta. Jos molemmat askeleet voidaan todistaa, induktio-oletus on tosi.

Esimerkki 14. Todistetaan väite

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} : 0 + 1 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}\right)$$

induktion avulla. Todistus tapahtuu seuraavasti

$\bullet$ Osoita, että $\left(\forall n \in \mathbb{N} : 0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$\Vdash$ {induktiotodistus}

- $\bullet$ Perusaskel: osoita, että $0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, kun
- $-$ $n = 0$
- $\Vdash$ $0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\equiv$ {sijoitetaan oletus $n = 0$}
- $0 = \frac{0(0+1)}{2}$
- $\equiv$ {nollalla kertominen}
- T
- $\square$
- $\bullet$ Induktioaskel: osoita, että $0 + 1 + \ldots + n' = \frac{n'\left(n'+1\right)}{2}$, kun
- $-$ $n' = n + 1$ ja
- $-$ $0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\Vdash$ $0 + 1 + \ldots + n'$
- $=$ {oletus}
- $0 + 1 + \ldots + n + (n + 1)$
- $=$ {induktio-oletus}
- $\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$
- $=$ {muutetaan samannimisiksi}
- $\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$
- $=$ {osittelulaki, vaihdantalaki}
- $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- $=$ {oletus $n' = n + 1$}
- $\frac{n'\left(n'+1\right)}{2}$
- $\square$

$\square$

Luku 4

Rakenteiset päättelyketjut

Yleinen rakenteinen päättelyketju on peräkkäinen jono päättelyaskeleita, joissa jokainen askel on joko

- oletus,
- merkintä,
- fakta,
- määritelmä tai
- tehtävä.

Yleinen päättelyketju on traditionaalinen tapa jolla matemaatikko työstää ongelmaa. Ensiksi yritetääm muotoilla ongelma matemaattiseen muotoon. Tätä tehtäessä huomataan, että tarvitaan täsmällisempiä oletuksia ja ehkä myös lisäoletuksia. Samoin ehkä tarvitaan joitakin uusia käsitteitä, jotka on määriteltävä käsittelyn yksinkertaistamiseksi. Tämän jälkeen keskitytään ongelman ratkaisuun. Kun alkuperäinen ongelma on ratkaistu, huomataan, että tästä seuraa muita kiinnostavia tuloksia, joita myös voidaan tarkastella samassa yhteydessä. Nämä vaativat lisäoletuksia ja uusia määritelmiä ja johtavat uusiin tehtävänasetteluihin, jne.

Matemaattinen tarkastelu kehittyy hieman romaanin tavoin, jossa on selkeä juoni ja kohokohtia. Ero romaaniin on, että jokainen askel on todistettava oikeaksi, sillä yksikin virhe voi pilata koko rakennelman.

Yleinen rakenteinen päättelyketju antaa e enemmän vapautta kuin aiemmin tarkastellut rakenteiset tehtävät, jotka keskittyvät yhden määrätyn tehtävän ratkaisemiseen:

- Voidaan määritellä uusia käsitteitä, ennen kuin muotoillaan tehtäviä tai havaintoja, joissa käytetään näitä käsitteitä.
- Voidaan ratkaista useita tehtäviä samojen oletusten, havaintojen ja määritelmien ollessa voimassa.

- Kaikkia oletuksia ei tarvitse esitellä heti, vaan niitä voi ottaa mukaan sitä mukaan kun niitä tarvitaan.

Yleiset rakenteiset päättelyketjut yleistävät kaikki aiemmin kuvatut rakenteet. Rakenteinen tehtävä on erikoistapaus yleisestä päättelyketjusta, jossa on vain yksi tehtävä. Yksittäinen oletus, merkintä, fakta ja määritelmä ovat kaikki myös erikoistapauksia yleisestä päättelyketjusta.

4.1 Määritelmä

Uutena asiana tässä on määritelmä. Sen yleinen muoto on

+ Määrittele $c_1 \in A_1, \ldots, c_m \in A$

  {perustelu}

  määrittelyehto

Tämä määrittelee uudet vakiot $c_1 \in A_1$, $\ldots$, $c_m \in A_m$, joita sitten voi käyttää vapaasti jatkossa. Perustelun tulee näyttää, että voimassa olevista oletuksista ja aikaisemmista havainnoista ja määritelmistä seuraa, että näille vakioille voidaan antaa seuraavalla rivillä annettavan määrittelyarvon toteuttavat arvot. Määritelty vakio voi olla yksinkertainen kuten realiluku tai kokonaisluku, mutta se voi olla myös esimerkiksi funktio.

Määritelmiä voi käyttää myös rakenteisissa tehtävissä samalla tavalla kuin faktoja. Ne voivat olla hyödyllisiä, kun esimerkiksi tarvitaan lyhyempi notaatio jollekin monimutkaiselle käsitteelle. Yleensä määritelmällä on kuitenkin yleisempi tavoite. Sitä ei käytetä vain yhden tehtävän ratkaisussa vaan eri paikoissa, kun analysoidaan jotain teoriaa tai mallia. Tällöin on luonnollista että määritelmä on osa yleistä teorian kehittelyä, eli se on päättelyaskel yleisessä päättelyketjussa.

Esimerkki 15. Jono $a_0, a_1, a_2, \ldots$ määritellään seuraavasti:

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

kun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Osoita että (A) $0 < a_n < \dfrac{1}{2}$ kun $n \geq 1$, että (B) $a_{n+1} > a_n$ kun $n \geq 0$ ja (C) laske $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ratkaisemme tämän tehtävän yleisellä päättelyketjulla. Tehtävien tunnuksina käytämme alla suuria kirjaimia, A, B, ja C.

+ Määrittele $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

{Funktio a kuvaa jonoa, kun merkitään $a_i = a(i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Tämä jono on hyvin määritelty, koska $2n + 1 > 0$ kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ }

$a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ kun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

A. Osoita että $0 < a_n < \dfrac{1}{2}$, kun

\- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$\Vdash$ $0 < a_n < \dfrac{1}{2}$

$\equiv$ {määritelmä a_n}

$0 < \dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{1}{2}$

$\equiv$ {molemmat puolet kerrotaan lausekkeella $2n + 1$, kirjoita kaksoisepäyhtälö konjunktiona}

$0 < n \wedge n < \dfrac{2n+1}{2}$

$\equiv$ {yksinkertaista}

$0 < n \wedge 2n < 2n + 1$

$\equiv$ {oletuksen mukaan $n \geq 1$, joten ensimmäinen väite on tosi; toinen väite on aina tosi}

T

$\square$

B. Osoita että $a_{n+1} > a_n$, kun

\- $n \in \mathbb{N}$

$\Vdash$ $a_{n+1} > a_n$

$\equiv$ {määritelmä a_n}

$\dfrac{n+1}{2(n+1)+1} > \dfrac{n}{2n+1}$

$\equiv$ {yksinkertaista}

$\dfrac{n+1}{2n+3} > \dfrac{n}{2n+1}$

$\equiv$ {kerro lausekkeella $(2n + 3)(2n + 1)$, mikä oletuksen mukaan on positiivinen}

$(2n + 1)(n + 1) > (2n + 3)n$

$\equiv$ {yksinkertaista}

$2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + 3n$

$\equiv$ {vähennä $2n^2 + 3n$ molemmilta puolilta}

$1 > 0$

$\equiv$ {aritmetiikkaa}

T

$\square$

C. Määritä $\lim_{n\to\infty} a_n$

$\Vdash$ $\lim_{n\to\infty} a_n$

$=$ {määritelmän mukaan}

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$

$=$ {jaa sekä nimittäjä että tekijä lausekkeella n }

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}$

$=$ {yksinkertaista}

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$

$=$ $\{\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty\}$

$\frac{1}{2}$

$\square$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ ∎

4.2 Mallinnus

Yleiset rakenteiset päättelyketjut ovat hyvin käyttökelpoisia, kun halutaan mallittaa jokin tilanne ja sitten esittää kysymyksiä tästä mallista. Seuraavassa ratkaistaan aiemmin esitetty tehtävän Helsingin ja Lappeenrannan välisestä junayhteydestä uudestaan mutta käyttäen yleistä päättelyketjua. Tämä tarkoittaa sitä, että rakennamme ensiksi mallin joka kuvaa tehtävää, ja lähdemme sitten ratkaisemaan malliin liittyviä kysymyksiä.

Mallinnuksessa on usein hyvä ilmoittaa miten eri suureita merkitään. Tällainen *merkintä* kirjoitetaan muotoon

\+ $c_1 \in A_1, \ldots, c_m \in A$

Tämä sanoo, että päättelyketjussa otetaan käyttöön uudet vakiot nimeltään $c_1, \ldots, c_m$ ja että vakion c_1 arvo kuuluu joukkoon A_1, vakion c_2 kuuluu joukkoon A_2 ja niin edelleen..

Merkintä voidaan ymmärtää määritelmän erikoistapaukseksi, jossa määriteltävästä vakiosta ei kerrota muuta kuin vakion nimi ja mihin arvojoukkoon se kuuluu. Oletuksissa voidaan myöhemmin antaa lisärajoitteita kyseiselle vakiolle.

Esimerkki 16. Vuoden 1960 jälkeen nopeimman junayhteyden matka-aika Helsingin ja Lappeenrannan välillä on lyhentynyt 37 prosenttia. Laske, kuinka monta prosenttia keskinopeus on tällöin noussut. Oletetaan, että radan pituus ei ole muuttunut.

Aloitetaan nimeämällä vakiot, joita käytetään tehtävän kuvauksessa.

\+ $s \in \mathbb{R}$– etäisyys Helsingin ja Lappeenrannan välillä

\+ $t \in \mathbb{R}$– alkuperäinen matkustusaika

\+ $t' \in \mathbb{R}$– nykyinen matkustusaika

Päättelyketjuissa voi kirjoittaa kommentteja ”–” merkin jälkeen. Tässä kommentit auttavat muistamaan, mitä alkuperäisen ongelman suureita vakiot kuvaavat. Samoin yleisessä päättelyketjussa ei tarvitse kirjoittaa koko päättelyketjua yhtenä pötkönä, vaan askeleiden väliin voidaan lisätä tekstiä, joka auttaa ymmärtämään, miten edetään ratkaisussa.

Seuraavaksi kirjataan oletukset:

(a) $t' = 0.63 \cdot t$

(b) $s > 0$,$t > 0$,$t' > 0$

Huomaa lisätyt oletukset, joiden mukaan s, t, t' ovat kaikki suurempia kuin nolla. Tämä seuraa tehtävän määrittelystä.Koska tiedetään, että $s > 0$, matkustusaika ei voi olla nolla.

Nopeudet määritellään tavanomaisella tavalla:

[1] Määrittele $v \in \mathbb{R}$– alkuperäinen keskinopeus

$\{v$ on hyvin määritelty, koska $t > 0\}$

$$v = \frac{s}{t}$$

[2] Määrittelel $v' \in \mathbb{R}$– nykyinen keskinopeus

$\{v'$ on hyvin määritelty, koska $t' > 0\}$

$$v' = \frac{s}{t'}$$

Määrittelemme nopeuksen muutosprosentin seuraavasti:

[3] Määrittele $p \in \mathbb{R}$ – nopeuden muutosprosentti

$\{p$ on hyvin määritelty koska $s, t > 0$, jolloin myös $v > 0\}$

$$p = \frac{v' - v}{v}$$

Voimme nyt ratkaista tehtävän:

- p

= {määritelmä [3]}

$$\frac{v' - v}{v}$$

= {määritelmät [1] ja [2]}

$$\frac{\frac{s}{t'} - \frac{s}{t}}{\frac{s}{t}}$$

= {sievennetään}

$$\frac{\frac{s}{t'}}{\frac{s}{t}} - 1$$

= {sievennetään murtoluvut}

$$\frac{s \cdot t}{s \cdot t'} - 1$$

= {sievennetään, oletus}

$$\frac{1}{0,63} - 1$$

≈ {lasketaan lausekkeen likiarvo}

0.59

= {muutetaan prosenteiksi: $x\% = \frac{x}{100}$}

59%

□

Vastaus: keskinopeus on noussut 59%.

Yleinen rakenteinen päättelyketju on parempi tapa esittää matemaattinen argumentointi kuin rakenteinen tehtävä silloin, kun argumentista tulee pitkä ja on tarve selittää mihin eri päättelyaskeleilla pyritään.

Luku **5**

Päättelyketjut ja logiikka

Keskeinen piirre rakenteisissa päättelyketjuissa on loogisten lausekkeiden ja sääntöjen käyttö matemaattisissa todistuksissa ja johdoissa. Logiikka on tietysti olennainen osa kaikissa todistuksissa, mutta useimmiten sitä käytetään epämuodollisesti. Loogista merkintätapaa käytetään satunnaisesti ja silloinkin epäjärjestelmällisellä tavalla. Rakenteisissa päättelyketjuissa logiikkaa käytetään todistuksissa systemaattisesti, loogista merkintätapaa noudattaen ja loogisiin päättelysääntöihin nojautuen. Loogisilla lausekkeilla voidaan silloin laskea samalla tavalla kuin tavallisilla aritmeettisilla lausekkeilla.

5.1 Loogiset väittämät

Taulukkoon 5.1 on kerätty yhteenveto rakenteisissa päättelyketjuissa käytetyistä loogisista merkinnöistä Merkinnät ovat suhteellisen standardeja, vaikkakin joitain muunnelmia merkinnöistä löytyy. Esimerkiksi implikaatiosta voidaan käyttää myös merkintää "$\rightarrow$" ja ekvivalenssille on käytössä myös merkinnät "$\Leftrightarrow$" ja "$\leftrightarrow$". Konjunktiolle käytetään joskus merkintää "&" ja disjunktiolle "|". Universaalikvanttoria merkitään joskus "Ax" ja eksistenssikvanttoria "Ex".

Taulukko 5.1: Loogiset symbolit ja operaatiot

T	:	*tosi*, totuudenmukainen väittämä (true)
F	:	*epätosi*, valheellinen väittämä (false)
$\neg p$	:	*negaatio*, väittämä $\neg p$ saa päinvastaisen totuusarvon kuin p
$p \wedge q$	:	*konjunktio*, on tosi jos sekä p ja q ovat tosia
$p \vee q$	:	*disjuktio*, on tosi jos p tai q (tai molemmat) ovat tosia
$p \Rightarrow q$	:	*implikaatio*, jos p on tosi, niin myös q on tosi
$p \equiv q$	:	*ekvivalenssi*, p on yhtä tosi kuin q
$(\forall x : p\,(x))$	:	*universaalikvanttori*, $p(x)$ on tosi jokaiselle muuttujan x arvolle
$(\exists x : p\,(x))$	:	*eksistenssikvanttori*, $p(x)$ on tosi jollakin muuttujan x arvolla

Aiemmissa esimerkeissä on jo käytetty loogista notaatiota melko vapaasti. Lukion matematiikassa tarvitaan itse asiassa huomattavan paljon logiikkaa sekä matemaattisten väittämien esittämiseen että näiden manipulointiin. Näytetään ensiksi, miten logiikkaa tarvitaan lukion matematiikassa jo silloin, kun ratkaistaan toisen asteen yhtälö.

Esimerkki 6. Tehtävänä on ratkaista toisen asteen yhtälö $7x^2 - 6x = 0$. Seuraava rakenteinen päättelyketju ratkaisee yhtälön:

$\bullet$ Ratkaise yhtälö $7x^2 - 6x = 0$

$\Vdash$ {ekvivalenssi on transitiivinen}

$7x^2 - 6x = 0$

$\equiv$ {osittelulaki: $a\,(b + c) = ab + ac$}

$x\,(7x - 6) = 0$

$\equiv$ {tulon nollasääntö: $ab = 0 \equiv (a = 0 \vee b = 0)$}

$x = 0 \vee 7x - 6 = 0$

$\equiv$ {ratkaistaan disjunktion oikeanpuoleinen yhtälö}

$x = 0 \vee x = \frac{6}{7}$

$\square$

Johdossa muutetaan looginen lauseke $7x^2 - 6x = 0$ ekvivalenssin säilyttävin askelin loogiseksi lausekkeeksi $x = 0 \vee x = \frac{6}{7}$, joka suoraan näyttää, millä kahdella arvolla muuttuja x toteuttaa yhtälön (muuttuja x toteuttaa yhtälön, kun sen arvo on 0 tai $\frac{6}{7}$). Jokainen askel perustellaan säännöllä. Esimerkiksi ensimmäisessä askeleessa käytetään kertolaskun osittelulakia. Säännön mukaan $a\,(b + c) = ab + ac$. Tätä sääntöä käytetään askeleessa

$$7x^2 - 6x = 0 \quad \equiv \quad x\,(7x - 6) = 0,$$

eli uudelleen kirjoitettu yhtälö on ekvivalentti alkuperäisen kanssa.

Huomionarvoinen asia on se, että toisen asteen yhtälön ratkaisu annetaan disjunktiona. Edellä olleella johdolla siis osoitettiin se, että yhtälö $7x^2 - 6x = 0$ on yhtä tosi kuin yhtälö $x = 0 \vee x = \frac{6}{7}$. Yhtälö on siis looginen lauseke, joka voi olla tosi joillakin muuttujan x arvoilla ja epätosi muilla muuttujan x arvoilla.

Rakenteisia päättelyketjuja voi käyttää argumentointiin myös väittämissä, joissa luonnollista kieltä käytetään lausekkeissa. Seuraava esimerkki kuvaa tätä.

Esimerkki 7. Osoitetaan, että $k^2 + k$ on parillinen luku jokaiselle kokonaisluvulle k. Yksinkertainen todistus väittämän oikeellisuudesta on seuraava:

$\bullet$ Osoita, että $k^2 + k$ on parillinen luku, kun

\- k on kokonaisluku

$\Vdash$ luku $k^2 + k$ on parillinen

$\equiv$ {osittelulaki}

luku $k\,(k + 1)$ on parillinen

$\equiv$ {tulo on parillinen, jos jokin tulon tekijöistä on parillinen}

luku k on parillinen $\vee$ luku $k + 1$ on parillinen

$\equiv$ {toinen kahdesta perättäisestä kokonaisluvusta on aina parillinen}

T

$\square$

Esimerkissä on käytetty luonnollista kieltä loogisissa väittämissä, esimerkiksi ”$k^2 + k$ on parillinen luku”.

Tehtävänä oli todistaa että väittämä ”$k + k$ on parillinen luku” on tosi. Tämän ilmaistaan seuraavasti

$$(k^2 + k \text{ on parillinen luku}) \equiv T,$$

toisin sanoen väittämä ”$k^2 + k$ on parillinen luku” on ekvivalentti totuusarvon T kanssa. Jos väittämä halutaan todistaa päättelyketjun avulla, kirjoitetaan väittämät ekvivalenssirelaatioiden avulla.

Koska $p \Rightarrow T$ on aina tosi, riittää itse asiassa, että osoitetaan väittämä $T \Rightarrow p$ todeksi. Tästä seuraa suoraan, että p on tosi. Meillä on siis yleinen sääntö

$$(p \equiv T) \equiv (T \Rightarrow p)$$

Seuraava esimerkki kuvaa taas, miten loogisten lausekkeiden säännöistä on hyötyä, kun ratkaistaan lukiotason ongelmia.

Esimerkki 9. Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusan pituus on 15 cm, piirin ollessa 36 cm. Määritä kateettien pituus.

Päättelyssä käytetään apuna Pythagoraan lausetta $a^2+b^2=c^2$, jossa a ja b ovat kateetteja ja c on hypotenuusa. Kolmion piiri voidaan laskea tavalliseen tapaan sivujen summana eli $a+b+c$.

• Laske kateettien pituus kolmiossa, kun

(a) kolmio on suorakulmainen, jossa kateetit ovat a ja b sekä hypotenuusa c

(b) $c = 15$ (cm)

(c) kolmion piiri on 36 (cm)

$\Vdash$ T

$\equiv$ {pythagoraan lause, oletus (a)}

$a^2+b^2=c^2$

$\equiv$ {oletus (b) ja (c)}

$a^2+b^2=15^2 \wedge a+b+15=36$

$\equiv$ {ratkaistaan b oikeanpuoleisesta yhtälöstä}

$a^2+b^2=15^2 \wedge b=21-a$

$\equiv$ {sijoitetaan oikeanpuoleisesta yhtälöstä ratkaistu b vasemmanpuoleiseen yhtälöön, $15^2=225$}

$a^2+(21-a)^2=225 \wedge b=21-a$

$\equiv$ {lasketaan $(21-a)^2$}

$a^2+441-42a+a^2=225 \wedge b=21-a$

$\equiv$ {sievennetään vasemmanpuoleinen yhtälö}

$2a^2-42a+216=0 \wedge b=21-a$

$\equiv$ {ratkaistaan toisen asteen yhtälö}

- • $2a^2-42a+216=0$
- $\equiv$ {toisen asteen yhtälön ratkaisukaava}
- $a=\frac{-(-42)\pm\sqrt{42^2-4\cdot 2\cdot 216}}{2\cdot 2}$
- $\equiv$ {sievennetään}
- $a=\frac{42\pm\sqrt{1764-1728}}{4}$
- $\equiv$ {sievennetään}
- $a=\frac{42\pm 6}{4}$

$\equiv$ {sievennetään}

$a = 9 \vee a = 12$

$\square$

$\ldots \quad (a = 9 \vee a = 12) \wedge b = 21 - a$

$\equiv$ {distributiivisuus: $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$}

$(a = 9 \wedge b = 21 - a) \vee (a = 12 \wedge b = 21 - a)$

$\equiv$ {sijoitetaan muuttujan a arvo muuttujan b yhtälöön}

$(a = 9 \wedge b = 21 - 9) \vee (a = 12 \wedge b = 21 - 12)$

$\equiv$ {sievennetään}

$(a = 9 \wedge b = 12) \vee (a = 12 \wedge b = 9)$

$\square$

Vastauksesta käy ilmi, että toisen kateetin pituus on 9 cm ja toisen pituus on 12 cm.

Todistus aloitettiin todesta väitteesta T. Koska tiedämme että Pytaghoran lause on tosi, voimme oletusta (a) käyttäen näyttää että

$$T \equiv a^2 + b^2 = c^2$$

Jatkossa osoitetaan, että $a^2 + b^2 = c^2$ on ekvivalentti väittämän $(a = 9 \wedge b = 12) \vee (a = 12 \wedge b = 9)$ kanssa. Koska T on tosi, lopputuloksena saatu väittämäkin täytyy olla tosi, ja tehtävä on siis ratkaistu.

5.2 Kvanttorit lukiomatematiikassa

Seuraava tehtävä on esimerkki hieman haastavammasta päättelyketjusta, jossa näytetään, miten matemaattisen ongelman ratkaisussa käytetään loogiikan merkintätapaa, tässä kvanttorinotaatiota.

Esimerkki 8. Millä vakion a arvoilla funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on aina negatiivinen, kun $f(x) = -x^2 + ax + a - 3$ kaikilla x?

Tässä tapauksessa päätehtävän ratkaiseminen edellyttää, että ratkaistaan kaksi osatehtävää (laske diskriminantti D_f ja laske sen nollakohdat).

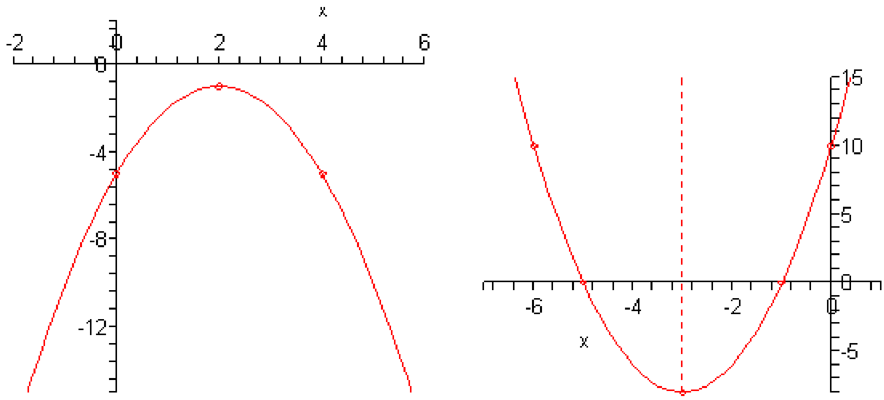
Argumentoinnissa tukeudutaan kuvan 5.1 käyriin, jotka ovat ylöspäin ja alaspäin aukeavia paraabeleja:

Tehtävä ratkaistaan rakenteisella päättelyketjulla seuraavasti.

- Laske millä vakion a arvoilla funktio f on aina negatiivinen, kun

\- $f(x) = -x^2 + ax + a - 3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$

Kuva 5.1: Ylöspäin ja alaspäin aukeava paraabeli



$\Vdash$ $\left(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0\right)$

$\equiv$ {funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli kun toisen asteen termin kerroin on negatiivinen; kuvaaja on aina negatiivinen, jos sillä ei ole nollakohtia (vasemmanpuoleinen kuva)}

$\left(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 \neq 0\right)$

$\equiv$ {toisen asteen yhtälöllä ei ole nollakohtia, jos diskriminantti D_f on nollaa pienempi}

$D_f < 0$

$\equiv$ {sijoitetaan diskriminantin D_f arvo}

- Laske diskriminantin D_f arvo

$\Vdash$ D_f

$=$ { yhtälön $Ax^2 + Bx + C = 0$ diskriminantti saadaan kaavasta $B^2 - 4AC$}

$a^2 - 4\,(-1)\,(a - 3)$

$=$ {sievennys}

$a^2 + 4a - 12$

$\square$

$\ldots$ $a^2 + 4a - 12 < 0$

$\equiv$ {funktion, jonka määrittelee lauseke $a^2 + 4a - 12$, kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli kun toisen asteen termin kerroin on positiivinen, kuvaaja on siten negatiivinen nollakohtiensa välissä (oikeanpuoleinen kuva)}

- Laske polynomin $a^2 + 4a - 12$ nollakohdat

$\Vdash$ $a^2 + 4a - 12 = 0$

$\equiv$ {toisen asteen yhtälön ratkaisukaava}

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$

$\equiv$ {ratkaistaan}

$a = 2 \lor a = -6$

□

... $-6 < a < 2$

□

Näin on siis todistettu, että

$$\left(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0\right) \equiv -6 < a < 2.$$

Toisin sanoen funktio f on negatiivinen, jos ja vain jos $-6 < a < 2$.

Rakenteisissa päättelyketjuissa käytetään vapaasti loogisia väittämiä ja loogisia inferenssisääntöjä, kun väittämien yhtäläisyyksiä perustellaan. Tässä tapauksessa tarvittiin universaalikvanttoria ongelman muotoiluun.

Päättelyketjussa ja toisessa alipäättelyssä käytetään ekvivalenssia loogisten lausekkeiden välisenä relaationa, kun taas ensimmäisessä alipäättelyssä käytetään yhtäsuuruuksia aritmeettisten lausekkeiden välissä.

Rakenteisissa päättelyketjuissa voidaan myös käyttää lisämateriaalia kuten kuvioita, taulukoita tai muita apuvälineitä. Edellisessä esimerkkitehtävässä oli kaksi kuviota, joihin viitattiin todistuksessa. Lisämateriaali esitellään todistuksen ulkopuolella, mutta siihen voi viitata päättelyketjussa. Todistuksessa käytetään myös hyväksi paraabelien ominaisuuksia.

Esimerkissä on todistettava, että väittämien välinen relaatio on ekvivalenssi. Jos todistettaisiin ainoastaan oikeanpuoleinen implikaatio

$$(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0) \Rightarrow -6 < a < 2,$$

vakiolle a asetetut ehdot voisivat olla liian heikkoja, minkä vuoksi olisi mahdollista, että saataisiin ylimääräisiä arvoja, jotka eivät täytä alkuperäisiä vaatimuksia. Jos toisaalta osoitettaisiin vain

$$\left(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0\right) \Leftarrow -6 < a < 2,$$

olisi mahdollista, että ei saataisi kaikkia vakion a arvoja, joilla alkuperäiset ehdot toteutuvat. Ekvivalenssilla voidaan todistaa, että ehto totetuu vakiolle a saaduilla arvoilla ja vain niillä.

5.3 Täsmällinen todistaminen

Aikaisemmissa todistuksissa todistusaskeleiden perustelut ovat olleet varsin vapaamuotoisia. Jos todistuksista halutaan tehdä loogisesti tarkkoja, on tärkeää, että mainitaan, mitä päättelysääntöä todistusaskeleessa on käytetty. On myös mainittava, miten sääntöä on käytetty ja perustelut sille, miksi sääntöä saa käyttää kyseisessä asiayhteydessä.

Tarkastellaan osittelulakia, joka on tyypillinen algebran sääntö:

$$x(y+z) = xy + xz.$$

Tämä on tosi jokaisella aritmeettisella lausekkeella x,y ja z. Tässä x,y ja z ovat ns. metamuuttujia (tai syntaktisia muuttujia), jotka korvataan konkreettisilla lausekkeilla, kun sääntöä käytetään.

Todistusaskeleen tarkka perustelu voidaan kirjoittaa muodossa

$$\{\textit{nimi} : \textit{sääntö}, \text{ missä } \textit{sijoitukset}, \text{ ehto } \textit{oletus} \text{ on voimassa}\}$$

Perustelussa

- mainitaan säännön nimi (*nimi*),
- kirjoitetaan tarpeen vaatiessa itse sääntö (*sääntö*),
- esitellään, miten sääntöä on käytetty (eli mitkä arvot on sijoitettu syntaktisille muuttujille) (*sijoitukset*) sekä
- todetaan, että oletukset säännön käyttämiseksi on täytetty.

Tarkemman perustelun askeleelle, jossa käytetään osittelulakia, voi siten kirjoittaa muotoon:

$(a-b)\,(a+b)$

$=$ {yhteenlaskun osittelulaki: $x\,(y+z) = xy+xz$, missä $x := a-b$, $y := a$, $z := b$, ehto että $a-b$, a ja b ovat aritmeettisia lausekkeita on voimassa}

$(a-b)\,a + (a-b)\,b$

Tässä $x := a-b$, $y := a$ ja $z := b$ ovat säännössä käytettäviä sijoituksia. Osittelulakia sovelletaan siis niin, että muuttujaksi x valitaan $a-b$, muuttujaksi y valitaan a ja muuttujaksi z valitaan b. Todetaan myös, että sääntöä saa käyttää siksi, että kaikki lausekkeet ovat aritmeettisia. Sijoituksen jälkeen saadaan osittelulain erikoistapauksen:

$$(a-b)(a+b) = (a-b)a + (a-b)b$$

Sääntö voidaan kirjoittaa suoraan perusteluun, kuten edellä on tehty, tai sitten kirjoitetaan vain säännön nimi. Usein sijoitus jätetään pois, jos todistusaskeleesta käy selvästi ilmi, mitä sijoitusta on käytetty. Samalla tavalla voidaan jättää ehdot pois, jos ne selviävät asiayhteydestä. Todistusaskeleet voidaan tällöin perustella erittäin lyhytsanaisesti,

	$(a-b)(a+b)$
$=$	{yhteenlaskun osittelulaki}
	$(a-b)a+(a-b)b$

Lukijan tehtävänä on silloin lisätä tarvittavat yksityiskohdat eli se, mitä sääntö itse asiassa sanoo ja mitä sijoitusta on käytetty. Lisäksi täytyy tarkistaa, että oletukset säännön käytölle ovat voimassa.

Todistetaan seuraavaksi summan ja erotuksen tulon kaava uudelleen, mutta tällä kertaa käytetään todistuksessa ainoastaan reaalilukujen aksioomia. Todistuksessa käytetään alipäättelyjä, jotta todistuksella olisi sama rakenne kuin aikaisemmalla todistuksella eli niissä on samat pääaskeleet.

Esimerkki 17.

•	Osoita, että $(a-b)\,(a+b)=a^2-b^2$ käyttäen ainoastaan reaalilukujen aksioomia
$\Vdash$	{transitiivisuus}
	$(a-b)\,(a+b)$
$=$	{todistetaan aksioomien avulla}
...	$a^2+(-ba)+ba+\left(-b^2\right)$
$=$	{todistetaan aksioomien avulla}
...	a^2-b^2
□	

Tässä todistuken alipäättelyt on piilotettu, jotta nähdään todistuksen kokonaisrakenne. Ensimmäisen askeleen alipäättely on seuraava:

•	Todista $(a-b)\,(a+b)=a^2-b^2$ aksioomien avulla
$\Vdash$	$(a-b)\,(a+b)$
$=$	{yhteenlasun osittelulaki: $x\,(y+z)=xy+xz$, missä $x:=a-b$, $y:=a$, $z:=b$}
	$(a-b)a+(a-b)b$

$=$ {vaihdantalaki: $xy = yx$, missä $x := a - b$, $y := a$}

$a(a-b) + (a-b)b$

$=$ {vaihdantalaki: $xy = yx$, missä $x := a - b$, $y := b$}

$a(a-b) + b(a-b)$

$=$ {vähennyslaskun määrittelmä: $x - y = x + (-y)$, missä $x := a$, $y := b$}

$a(a+(-b)) + b(a+(-b))$

$=$ {yhteenlaskun osittelulaki: $x\,(y+z) = xy + xz$, missä $x := a$, $y := a$, $z := -b$}

$aa + a\,(-b) + b(a+(-b))$

$=$ {yhteenlaskun osittelulaki: $x\,(y+z) = xy + xz$, missä $x := b$, $y := a$, $z := -b$}

$aa + a\,(-b) + ba + b\,(-b)$

$=$ {vaihdantalaki: $xy = yx$, missä $x := a$, $y := -b$}

$aa + (-b)\,a + ba + b\,(-b)$

$=$ {kertominen vastakkaismerkkisellä luvulla: $(-x)\,y = -(xy)$, missä $x := b$, $y := a$ ja $y := b$}

$aa + (-ba) + ba + (-bb)$

$=$ {potenssin x^2 määritelmä: $x^2 = xx$, missä $x := a$ ja $x := b$}

$a^2 + (-ba) + ba + \left(-b^2\right)$

□

Toisen askeleen alipäättely on seuraava:

- Todista $a^2 + (-ba) + ba + \left(-b^2\right) = a^2 - b^2$ aksioomien avulla

$\Vdash$ $a^2 + (-ba) + ba + \left(-b^2\right)$

$=$ {vastalukujen summa: $-x + x = 0$, missä $x := ba$}

$a^2 + 0 + \left(-b^2\right)$

$=$ {nollan lisääminen: $x + 0 = x$, missä $x := a^2$}

$a^2 + \left(-b^2\right)$

$=$ {vähennyslaskenun määritelmä: $x - y = x + (-y)$, missä $x := a^2$, $y := b^2$}

$a^2 - b^2$

□

Tämä tarkempi todistus on paljon pidempi siksi, että siinä on käytetty ainoastaan reaalilukujen aksioomia. Kun alipäättelyt kätketään, jää jäljelle pelkästään alkuperäinen todistus. Tämä näyttää, miten rakenteisilla päättelyketjuilla voidaan argumentoida eri detaljitasoilla. Riippuen siitä, kenelle todistus suunnataan, voidaan esittää tarkka tai karkea versio valikoivalla alipäättelyjen näyttämisellä ja piilottamisella.

Luku 6

Rakenteisten päättelyketjujen yleinen muoto

Rakenteisella päättelyketjulla on seuraava yleinen muoto

***päättelyketju*:**

päättelyaskel$_1$

päättelyaskel$_2$

$\vdots$

päättelyaskel$_n$

Toisin sanoen päättelyketju on jono peräkkäisiä päättelyaskeleita. Yksittäinen päättelyaskel on joko oletus, merkintä, fakta, määritelmä tai (rakenteinen) tehtävä:

***päättelyaskel*:**

oletus | *merkintä* | *fakta* | *määritelmä* | *tehtävä*

Rakenteinen tehtävä kuvaa matemaattista tehtävää sekä sen ratkaisua. Yleinen muoto rakenteiselle tehtävälle on seuraavanlainen:

***tehtävä*:**

•	*kysymys*
-	*oletus*
⋮	
-	*oletus*
+	*määrittely*
	perustelu
	väite
⋮	
+	*määrittely*
	perustelu
	väite
⊩	*perustelu*
	lauseke
rel	*perustelu*
	lauseke
⋮	
rel	*perustelu*
	lauseke
□	*vastaus*

***perustelu*:**

{*selitys*}

tehtävä

⋮

tehtävä

Tässä *määritelmä* sisältää kaikki osat, määrittelyn, perustelun ja väitteen. *Faktassa* jätetään pois määrittely. *Merkinnässä* jätetään myös pois väite, joten siinä on vain määrittely. Rakenteinen lasku on erikoistapaus rakenteisesta tehtävästä, jossa ei ole kysymystä, oletuksia, merkintöjä, faktoja tai määritelmiä eikä vastauksia. Merkki ⊩ ja sitä seuraava perustelu jätetään myös pois laskusta.

Huomaa, että rakenteisessa tehtävässä *tehtävä* määritellään *perustelujen* avulla ja että *perustelu* määritellään *tehtävien* avulla. Päättelyketjujen muoto on siis *rekursiivinen.* Tämä tarkoittaa sitä, että tehtävän osana voi olla *sisempi* tehtävä, jonka sisällä voi olla vielä sisempi tehtävä ja niin edelleen. Käytännössä tehtäviä ei kuitenkaan kannata rakentaa lian paljon sisäkkäin, koska se voi tehdä ratkaisusta hankalan lukea.

Edellä esitelty päättelyketjujen esitysmuoto jättää konkreettiset yksityiskohdat määrittelemättä. Tämä on tarkoituksellista, sillä ajatuksena on, että nämä määräytyvät käytettävän loogisen teorian, halutun tarkkuustason, sekä taustalla olevan matemaattisen teorian mukaan. Jos haluttaisiin täysin kiinniittää rakenteisten päättelyketjujen syntaksi, pitäisi vielä määritellä täsmällisesti miten kirjoitetaan seuraavat päättelyketjun osat:

- *oletus* — looginen väittämä
- *väite* — looginen väittämä
- *selitys* — selitys sille, että päättelyaskel on oikeutettu
- *lausekkeet* — käytetyn teorian sallimat lausekkeet
- *rel* — laskuaskelten välinen relaatio
- *kysymys* – mitä tehtävässä on tehtävä
- *vastaus* – tehtävän vastauksen
- *määrittely* – uudet vakionimet jotka otetaan käyttöön

Nämä kategoriat jätetään kuitenkin määrittelemättä, jotta niissä voidaan käyttää haluttua esitystapaa sen mukaan, millä koulutuksen tasolla päättelyketjuja käytetään, mihin matematiikan osa-alueeseen menetelmää sovelletaan, ja miten täsmällisesti käytetty logiikka ilmaistaan.

Rakenteinen päättelyketju on vain osa matemaattisen ongelman ratkaisua. Ongelmaa ratkaistaessa pitää näiden rinnalle kirjoittaa myös yleinen pohdinta tehtävästä. Pohdinnan tarkoitus on kuvata sitä ympäristöä, missä tehtävä ratkaistaan. Siihen voidaan kirjoittaa esimerkiksi päättelyketjussa käytettäviä yleisiä sääntöjä (ja mukaan voidaan liittää sääntöjen perustelut) tai siinä voidaan tarkastella todistukseen liittyviä kuvioita ja taulukoita. Pohdintaan voidaan myös kirjoittaa päättelyketjuun tai tehtävään liittyviä havaintoja, jotka auttavat lukijaa ymmärtämään sitä, mitä tehtävässä tehdään ja miten päättelyketju on rakennettu.

Luku 7

Lisätietoa rakenteisista päättelyketjuista

Rakenteiset päättelyketjut on kuvattu laajemmin ja tarkemmin kirjassa

> *Teaching Mathematics in the Digital Age with Structured Derivations* (Ralph-Johan Back, Four Ferries Publishing, 2016).

Tästä kirjasta lyhyempi versio on

> *Structured Derivations: Teaching Mathematical Reasoning in High School* (Ralph-Johan Back, Four Ferries Publishing, 2015),

joka keskittyy menetelmän käyttöön lukiossa (sekä soveltuvin osin myös yläkoulussa). Molemmat kirjat ovat saatavilla esimerkiksi Amazonin kirjakaupasta.

Rakenteisista päättelyketjuista kiinnostuneen kannattaa myös tutustua lukion pitkän matematiikan digitaaliseen oppikirjasarjaan

> *eMath MAY 1 - MAA 10* (Ralph-Johan Back, Stefan Asikainen, Matti Hutri, Joonatan Jalonen, Antti Lempinen, Marie Linden-Slotte, Saara Mäkinen, Petri Sallasmaa, Petri Salmela, Four Ferries Publishing 2016).

Tämä oppikirjasarja näyttää konkreettisesti, miten lukion matematiikkaa voidaan opettaa rakenteisten päättelyketjujen avulla. Oppikirjasarja on saatavilla iPad tableteille AppStore verkkokaupasta sekä Android tableteille Google Play verkkokaupasta.

4f Studio järjestelmä tukee rakenteisten päättelyketjujen kirjoittamista tietokoneella. Järjestelmään sisältyy sähköinen vihko, jossa voidaan kirjoitta matemaattista tekstiä, luoda ja editoida rakenteisia päättelyketjuja sekä tehdä funktiograafeja, geometrisia kuvia ja matemaattisia taulukoita. *Four Ferries* verkkosivut (*www.fourferries.fi*) antavat lisäinformaatiota 4f Studiosta. Sieltä löytyy myös rakenteisia päättelyketjuja sekä digitaalista matematiikan opetusta käsitteleviä oppaita ja opetusvideoita samoin kuin informaatiota rakenteisiin päättelyketjuihin liittyvästä tutkimus- ja kehitystyöstä ja käytännön kokemuksia menetelmän käytöstä koulutuksen eri asteilla.

Johdatus rakenteisiin päättelyketjuihin

Rakenteiset päättelyketjut on menetelmä, jonka tarkoituksena on auttaa matemaattisen argumentoinnin rakentamisessa, esittämisessä ja ymmärtämisessä. Menetelmä soveltuu yhtä hyvin niin matemaattiseen todistamiseen ja algebralliseen ja aritmeettiseen laskentaan kuin geometriseen konstruktioon ja yleiseen ongelmanratkaisuunkin. Menetelmää voi käyttää aina, kun ongelman ratkaiseminen vaatii useampia peräkkäisiä päättelyaskeleita. Sitä on käytetty matematiikan eri tasoilla yläkoulun ja lukion matematiikasta aina korkeakouluopetukseen ja matematiikkaa hyödyntävään tutkimukseen. Menetelmä perustuu kiinteään tapaan esittää matemaattinen argumentointi sekä yksinkertaisen logiikan käyttöön. Kiinteä muoto helpottaa todistusten ja laskujen ymmärtämistä ja näiden oikeellisuuden tarkistamista. Tämän oppaan tavoitteena on näyttää, miten rakenteisia päättelyketjuja voidaan käyttää lukiotason matematiikan opetuksessa. Menetelmä kuvataan esimerkeillä, jotka vaihe vaiheelta laajentavat menetelmää uusilla piirteillä ja käsitteillä.

ISBN 978-952-7147-03-0

www.fourferries.com