Introduktion till strukturerade härledningar

Ralph-Johan Back

Four Ferries Publishing

Introduktion till strukturerade härledningar

Ralph-Johan Back

Four Ferries Publishing

Kontaktinformation

Ralph-Johan Back, Professor i datavetenskap
Åbo Akademi
Joukahainengatan 3 – 5, 50250 Åbo, Finland
mail: backrj@abo.fi, web: www.abo.fi/~backrj

Four Ferries Publishing

ISBN 978-952-7147-04-7

Cover picture: Tuncay. License: CC0. Source::
https://www.flickr.com/photos/tuncaycoskun/26674923712/

Förord

Strukturerade härledningar är en metod underlätta konstruktion, presentation och förståelsen av matematiska argument. Metoden är lämplig för matematiska bevis och algebraiska och aritmetiska beräkningar såväl som för geometriska konstruktioner och allmän problemlösning. Metoden kan alltid användas då en lösning till ett problem kräver flera steg efter varandra. Den har använts på olika nivåer av matematikundervisning, från högstadienivå till universitetsnivå och tillämpad forskning. Metoden baserar sig på ett fast format för att presentera matematiska argument och användning av enkel logik. Det fasta formatet gör det enklare att förstå bevis och beräkningar och att kontrollera att de är korrekta.

Målet med den här guiden är att visa hur strukturerade härledningar kan användas vid undervisning av matematik i gymnasiet. Metoden beskrivs med exempel, som steg för steg utvidgar metoden med nya funktioner och koncept. Den här guiden är en utvidgad version av föregående manual som publicerades som *Matematiikkaa logiikan avulla: Johdatus rakenteisiin päättelyketjuihin* (Ralph-Johan Back, TUCS Lecture Notes 10, 2008).

Tackord

Strukturerade härledningar utvecklades och metodens lämplighet för undervisning studerades i nära samarbete med medlemmarna av TUCS Learning and Reasoning laboratriet. Forskningslaboratoriet är ett samarbete mellan IT-institutionerna inom Åbo Akademi och Åbo Universitet. Jag vill tacka följande personer för intressanta och fruktbara diskussioner om metoden och för deras bidrag till dess utveckling (list är i alfabetisk ordning): Stefan Asikainen, Johannes Erikson, Matti Hutri, Tanja Kavander, Antti Lempinen, Linda Mannila, Mia Peltomäki, Viorel Preoteasa, Teemu Rajala, Tapio Salakoski, Petri Sallasmaa, Fredrik Sandström, Patrick Sibelius, Solveig Wallin and Joakim von Wright. Finlands Akademi och Teknologiindustrins 100 års jubileumsfond har finansierat forskningen som den här publikationen baserar sig på.

Innehåll

Kapitel 1

Inledning

Den här boken är en introduktion till *strukturerade härledningar.* Strukturerade härledningar skrivs i ett fast format, som visar den övergripande strukturen i ett matematiskt argument och hur de olika delarna hör ihop. Formatet som används för att presentera strukturerade härledningar kräver att varje steg i en härledning motiveras genom att man explicit förklarar varför det är korrekt. Stegen i en härledning använder logiska symboler och logikens regler används även explicit, på samma sätt som algebraiska beteckningar och regler används explicit i algebra. Detta snabbar upp argumentet och gör det mer tillförlitligt. Strukturerade härledningar erbjuder ett enhetligt format för olika typer av matematiska resonemang som bevis, aritmetiska och algebraiska beräkningar, geometriska bevis, textuppgifter med mera. Metoden lämpar sig för alla nivåer i matematik, från högstadiet till universitetsnivå och forskning.

Syftet med den här guiden är att ge en översikt av strukturerade härledningar med exempel tagna från gymasiematematiken. För att läsa texten krävs inte någon annan bakgrundsinformation än traditionell gymnasiematematik.

Kapitel 2

Strukturerade uppgifter

En strukturerad uppgift kombinerar en matematisk uppgift och dess lösning i en enda presentation, med ett fast format. En strukturerad uppgift kan vara en matematisk sats och dess bevis, en algebraisk uppgift och dess lösning, en textuppgift och dess lösning och så vidare. I det här kapitlet visar vi med några exempel hur man presenterar olika matematiska problem och deras lösningar som strukturerade uppgifter.

2.1 Strukturerade beräkningar

Vi beskriver först ett enkelt specialfall av en strukturerad uppgift, en *strukturerad beräkning*. Det vanliga sättet att presentera en algebraisk beräkning är att bilda en kedja av likheter,

$$t_0 = t_1 = ... = t_n.$$

Den här kedjan motsvarar påståendena

$$t_0 = t_1 \text{ och } t_1 = t_2 \text{ och } \ldots t_{n-1} = t_n$$

Ur den här kedjan kan vi dra slutsaten att

$$t_0 = t_n,$$

eftersom likhet är transitiv. Följande exempel visar hur vi skriver en sådan beräkning som en $s$trukturerad beräkning.

Exempel 1. Visa att konjugatregeln,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

gäller.

I en strukturerad beräkning skrivs varje uttryck på egen rad. Likhetstecknet mellan uttrycken skrivs också på egen rad, följd av motiveringen för att likheten gäller.

Beviset ser då t på följande sätt:

$$
\begin{array}{ll}
\bullet & (a-b)(a+b) \\
= & \{\text{regeln för multiplikation av polynom}\} \\
 & a^2+ab-ba-b^2 \\
= & \{\text{uttrycken } ab \text{ och } -ba \text{ tar ut varandra}\} \\
 & a^2-b^2 \\
\square &
\end{array}
$$

Beviset är en följd av tre algebraiska uttryck, med likhet emellan:

$$(a-b)(a+b) \; = \; a^2+ab-ab-b^2 \; = \; a^2-b^2$$

Det här bevisar påståendet, eftersom likhet är en transitiv relation. Vi motiverar likheterna med egenskaperna hos polynom.

Traditionellt skulle vi skriva beräkningen på följande sätt:

$$
\begin{array}{lll}
(a-b)(a+b) & = a^2+ab-ba-b^2 & \text{(enligt reglerna för multiplikation av polynom)} \\
 & = a^2-b^2 & \text{(uttrycken } ab \text{ och } -ba \text{ tar ut varandra)}
\end{array}
$$

I det här formatet måste både formeln och motiveringen få plats på samma rad. Det här innebär i praktiken att motiveringen måste vara kort. Den blir då ofta svår att förstå och det är lockande att lämna bort den från beräkningen. Men då går den grundläggande idén med matematiska bevis förlorad, att övertyga läsaren om att varje steg är matematiskt riktig, och att stegen i kombination med varandra leder till det önskade resultatet. Om motiveringarna lämnas bort måste läsare komma på dem själv. Det här gör det onödigt svårt att läsa och förstå ett bevis. Samtidigt ökar sannolikheten för missförstånd och fel, vilket i sin tur försvårar förståelsen av den efterföljande argumenteringen.

Ur pedagogisk synvinkel är det särskilt viktigt att alla motiveringar skrivs ut tydligt. Det är då enklare för läraren att kontrollera att eleven verkligen förstår teorin bakom en uppgift och tillämpar den på rätt sätt. Eleverna kommer också att enklare kunna kontrollera att deras egna beräkningar är korrekta, genom att gå igenom varje steg var för sig, kontrollera att motiveringen gäller och att steget har utförts korrekt.

En strukturerad beräkning reserverar en hel rad (eller mer än en rad om det behövs) för motiveringar, vilket innebär att det finns tillräckligt med utrymme för ordentliga motiveringar. Formatet tvingar en att motivera varje steg, eftersom en utelämnad motivering sticker ut i form av en tom parentes.

I allmänhet skriver vi beräkningar i form av strukturerade beräkningar på följande sätt:

$\bullet$	t_0
$\sim_1$	{förklaring till att påstående $t_0 \sim_1 t_1$ gäller}
	t_1
$\sim_2$	{förklaring till att påståendet $t_1 \sim_2 t_2$ gäller}
	t_2
$\vdots$	
	t_{n-1}
$\sim_n$	{förklaring till att påståendet $t_{n-1} \sim_n t_n$ gäller}
	t_n
$\square$	

I exemplet ovan är alla relationer $\sim_i$ likheter. Varje påstående i beräkningen motiveras med ett argument som skrivs mellan hakparenteser, efter symbolen för relationen. En beräkning skrivs i två kolumner: den första innehåller symbolerna för relationerna (i exemplet "=") och specialtecknen (här "$\bullet$" som inleder härledningen och "$\square$" som avslutar den), den andra kolumnen innehåller uttrycken och motiveringarna.

Mellan uttrycken kan förekomma vilken binär relation $\sim$ som helst. De vanligaste är $\equiv$ eller $\Leftrightarrow$ (ekvivalens), $\Rightarrow$ (implikation) och $\Leftarrow$ (omvänd implikation) för logiska påståenden och ordningsrelationer som $=, <, >, \leq, \geq$ för aritmetiska och algebraiska påståenden. Vilka som helst binära relationer kan användas. Vi väljer ofta transitiva relationer (alla ovannämnda relationer är transitiva). Det är också möjligt att använda olika binära relationer i samma härledning. T.ex. likhet kan kombineras med vilken relation som helst: om $a \sim b$ och $b = c$, så gäller påståendet $a \sim c$ också.

Ett exempel på en icke-transitiv relation är olikhet: $a \neq b$ och $b \neq c$ betyder inte nödvändigtvis att $a \neq c$. Ett enkelt exempel på motsatsen är $0 \neq 1$ och $1 \neq 0$, som båda är sanna, men $0 \neq 0$ är inte sant. Därför leder flera olikheter efter varandra i en beräkning oftast inte till det önskade resultatet.

2.2 Strukturerade uppgifter

Vi vill ofta vara noggranna med vilken uppgift vi löser och vilka antaganden som gäller. Då använder vi en allmän *strukturerad uppgift.* Följande exempel illustrerar det här formatet.

Exempel 2. Visa att om a,b och c är icke-negativa tal, så gäller det att

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + a + b + c$$

Vi formulerar uppgiften, antagandena och lösningen som en strukturerad uppgift.

$\bullet$	Visa att $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + a + b + c$, då
$-$	$a,b,c \geq 0$
$\Vdash$	$(1 + a)(1 + b)(1 + c)$
$=$	{multiplicera uttrycken $(1 + b)$ och $(1 + c)$ med varandra}
	$(1 + a)(1 + b + c + bc)$
$=$	{multiplicera uttrycken $(1 + a)$ och $(1 + b + c + bc)$ med varandra}
	$1 + b + c + bc + a + ab + ac + abc$
$\geq$	{subtrahera det icke-negativa uttrycket $ab + ac + bc + abc$ från uttrycket}
	$1 + a + b + c$
$\Box$	

Uppgiften vi vill lösa,

Visa att $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + a + b + c$

skrivs direkt efter uppgiftstecknet $\bullet$ i den andra kolumnen. På följande rader räknar vi upp antagandena. I det här exemplet finns endast ett antagande,

$a,b,c \geq 0$

Själva beviset är en strukturerad beräkning, som börjar efter $\Vdash$-tecknet och slutar vid $\Box$-tecknet, precis som tidigare.

En strukturerad beräkning är ett specialfall av en strukturerad uppgift där man lämnat bort uppgiften och antagandena. Den är en kortare form av presentation, som är lämplig då det framgår ur sammanhanget vad vi vill bevisa och vilka antaganden som gäller. Vi använder strukturerade uppgifter då vi vill skriva ut exakt vilken uppgiften är och vilka antaganden vi får göra. I praktiken används båda formaten sida vid sida.

En strukturerad uppgift har följande grundläggande format:

•	Uppgift
-	antagande$_1$
$\vdots$	
-	antagande$_m$
$\Vdash$	{en motivering för varför beräkningen löser uppgiften under de givna antagandena}
	t_0
$\sim_1$	{motivering av påstående $t_0 \sim_1 t_1$}
	t_1
$\sim_2$	{motivering av påstående $t_1 \sim_2 t_2$}
	t_2
$\vdots$	
	t_{n-1}
$\sim_n$	{motivering av påstående $t_{n-1} \sim_n t_n$}
	t_n
$\square$	

Vi skriver uppgiften som skall lösas efter "•"-symbolen. Därefter räknar vi upp antagandena på skilda rader. Ett antagande markeras med ett "−". Om vi behöver hänvisa till enskilda antaganden så kan vi markera dem med bokstäver i parenteser (som (a), (b) , ...). Beräkningen som följer efter antagandena börjar med en "$\Vdash$"-symbol (läses "bevisa att"). Beräkningen slutar med symbolen "$\square$" (läses "vilket skulle bevisas"). Efter bevissymbolen kan vi skriva en motivering av varför beräkningen bevisar påståendet under givna antaganden. Vi använder två kolumner. Vi skriver specialsymboler som "•", "$\Vdash$" ,"−" och relationssymbols i den första kolumnen och uppgiften, antaganden, uttryck och motiveringar i den andra kolumnen.

Vi kommer att utvidga det här grundläggande formatet med flera nya funktione senare, som t.ex. deluppgifter, fakta och definitioner. Det här grundläggande formatet fungerar dock bra för at lösa enklare problem.

2.3 Deluppgifter

Formatet ovan för en uppgift är tillräckligt när motiveringen för varje steg är relativt enkelt och kan skrivas på några få rader. När en motivering är mer komplicerad måste vi använda *deluppgifter* i motiveringarna.

Exempel 3. Visa att $m^2 - n^2 \geq 3$, då m och n är positiva heltal och $m > n$. I den här härledningen använder vi två grundläggande aritmetiska regler:

$$\begin{array}{ll} a + b \leq a + b', \ \text{ då } b \leq b' & \text{(addition är monoton)} \\ ab \leq ab', \ \text{ då } a \geq 0 \text{ och } b \leq b' & \text{(multiplikation är monoton)} \end{array}$$

Vi bevisar påståendet på följande sätt.

•	Visa att $m^2 - n^2 \geq 3$, då
$-$	m och n är positiva heltal och
$-$	$m > n$
$\Vdash$	$m^2 - n^2$
$=$	{konjugatregeln}
	$(m - n)\,(m + n)$
$\geq$	{multiplikation är monoton, enligt antagandena är $m - n \geq 0$ och $m + n \geq 3$}
	$(m - n) \cdot 3$
$\geq$	{multiplikation är monoton, enligt antagandena är $m - n \geq 1$ och $3 \geq 0$}
	$1 \cdot 3$
$=$	{räkna}
	3
$\square$	

Det andra steget av härledningen är relativt komplicerat. Det hänvisar till regeln om multiplikations monotonitet, men vi kan bara använda regeln i det här fallet om villkoren $m - n \geq 0$ och $m + n \geq 3$ uppfylls. Vi noterar att enligt antagandena uppfyller m och n följande villkor:

- $m > n$ enligt antagandet, så $m - n > 0$ (då är också $m - n \geq 0$),
- $n > 0$ enligt antagandet, så $n \geq 1$, och
- $m > n \geq 1$ enligt antagandet, så $m \geq 2$, och alltså. $m + n \geq 3$.

Vi kan skriva de här motiveringarna som oberoende (logiska) beräkningar på följande sätt:

$\bullet$ $\quad m > n$

$\equiv$ $\quad$ {aritmetik}

$\quad m - n > 0$

$\Rightarrow$ $\quad$ {aritmetik}

$\quad m - n \geq 0$

$\square$

$\bullet$ $\quad m > n$ och $n > 0$

$\equiv$ $\quad$ {aritmetik}

$\quad m \geq n{+}1$ and $n \geq 1$

$\Rightarrow$ $\quad$ {aritmetik}

$\quad m \geq 2$ and $n \geq 1$

$\Rightarrow$ $\quad$ {aritmetik}

$\quad m + n \geq 3$

$\square$

Vi använder här ekvivalensrelationen $\equiv$ mellan logiska påståenden. Relationen $p \equiv p'$, där p och p' är logiska påståenden, säger att p och p' är lika sanna. En annan vanlig beteckning för ekvivalens är $\Leftrightarrow$, men beteckningen $\equiv$ illustrerar bättre att det handlar om likhet mellan sanningsvärden. Ekvivalensrelationen är transitiv.

Istället för att skriva de här extra motiveringarna var för sig i beviset kan vi inkludera dem direkt i form av *deluppgifter*, som vi kan skriva indragna efter en motivering. Antaganden som man gör i härledningar gäller då också i efterföljande deluppgifter. Längre fram kommer vi att visa att deluppgifter också kan innehålla egna antaganden.

Exempel 4. Skriv om föregående bevis med hjälp av deluppgifter.

$\bullet$ Visa att $m^2 - n^2 \geq 3$, då

$-$ m och n är positiva heltal, och

$-$ $m > n$

$\Vdash$ $m^2 - n^2$

$=$ {konjugatregeln}

$(m - n)(m + n)$

$\geq$ {multiplikation är monoton, enligt antagandena är $m - n \geq 0$ och $m + n \geq 3$}

$\bullet$ $m > n$

$\equiv$ {aritmetik}

$m - n > 0$

$\Rightarrow$ {aritmetik}

$m - n \geq 0$

$\square$

$\bullet$ $m > n$ och $n > 0$

$\equiv$ {aritmetik}

$m \geq n + 1$ och $n \geq 1$

$\Rightarrow$ {aritmetik}

$m \geq 2$ och $n \geq 1$

$\Rightarrow$ {aritmetik}

$m + n \geq 3$

$\square$

$\ldots$ $(m - n) \cdot 3$

$\geq$ {multiplikation är monoton, enligt antagandena är $m - n \geq 1$ och $3 \geq 0$}

$1 \cdot 3$

$=$ {räkna}

3

$\square$

Nedan till vänster har vi en enkel motivering för bevissteget $t \sim t'$, och till höger en motivering med deluppgifter:

$$\begin{array}{ll} & t \\ \sim & \{\text{motivering}\} \\ & t' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & t \\ \sim & \{\text{motivering}\} \\ & \quad \mathit{uppgift}_1 \\ & \quad \vdots \\ & \quad \mathit{uppgift}_n \\ \ldots & t' \end{array}$$

En motivering kan stödas av n olika deluppgifter, $\mathit{uppgift}_1, \ldots, \mathit{uppgift}_n$, där $n \geq 0$. Deluppgifterna dras in ett steg till höger, så att de börjar vid följande kolumn. Det här gör det enklare att skilja mellan deluppgifterna och huvuduppgiften. Motiveringarna förklarar varför $t \; R \; t'$ är sant, om vi antar att varje deluppgift är sann. Eftersom deluppgifterna ibland kan vara rätt långa, så placerar vi tecknet ”...” där det andra uttrycket (i det här fallet t') som skall bevisas är. Det här gör det enklare att se var deluppgiften slutar och huvuduppgiften fortsätter.

2.4 Fokusera på deluttryck

I många fall är det nödvändigt att räkna med långa och komplicerade uttryck. Då kan vi använda delberäkningar som fokuserar på en del av ett uttryck och modifiera det utan att skriva om hela uttrycket i varje steg.

Exempel 5. Förenkla uttrycket $\sqrt{7+2\sqrt{11}}+\sqrt{7-2\sqrt{11}}$.

Lösningen ges som en strukturerad härledning med två delberäkningar, den ena innanför den andra.

$\bullet$ Förenkla uttrycket $\sqrt{7+2\sqrt{11}}+\sqrt{7-2\sqrt{11}}$

$\Vdash$ $\sqrt{7+2\sqrt{11}}+\sqrt{7-2\sqrt{11}}$

$=$ {kvadrera uttrycket, förenkla det och ta kvadratroten av det förenklade uttrycket}

> $\bullet$ $(\sqrt{7+2\sqrt{11}}+\sqrt{7-2\sqrt{11}})^2$
>
> $=$ {kvadreringsregeln}
>
> $7+2\sqrt{11}+2\cdot\sqrt{7+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{11}}+7-2\sqrt{11}$
>
> $=$ {fokusera på deluttycket $2\cdot\sqrt{7+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{11}}$}
>
> > $\bullet$ $2\cdot\sqrt{7+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{11}}$
> >
> > $=$ {skriv under samma rottecken}
> >
> > $2\cdot\sqrt{(7+2\sqrt{11})\cdot(7-2\sqrt{11})}$
> >
> > $=$ {konjugatregeln}
> >
> > $2\sqrt{49-4\cdot 11}$
> >
> > $=$ {förenkla}
> >
> > $2\sqrt{5}$
> >
> > $\square$
>
> ... $7+2\sqrt{11}+2\sqrt{5}+7-2\sqrt{11}$
>
> $=$ {förenkla}
>
> $14+2\sqrt{5}$
>
> $\square$

... $\sqrt{14+2\sqrt{5}}$

$\square$

Det ursprungliga problemet var att förenkla ett rotuttryck. Vi förenklar kvadraten av uttrycket i en delberäkning. Kvadratroten av det förenklade uttrycket är sedan lösningen till det ursprungliga problemet. Vi förenklar det komplicerade rotuttrycket i delberäkningen innanför den här beräkningen. När vi fokuserar på endast en del av uttrycket i delberäkningen blir det lättare att se vad vi modifierar. Dessutom gör vi färre misstag när vi inte behöver kopiera komplicerade uttryck från rad till rad.

Att skriva och läsa den här typen av bevis blir lättare om vi använder en dator och en editor med stöd för indentering, och som kan visa och dölja indragna rader (en så kallad *outlining editor*). Det här gör det möjligt att välja hur detaljerat man vill studera beviset. Om man gömmer deluppgifterna så får man en bättre överblick över beviset, och genom att visa dem får man en mer detaljerad bild av beviset. När en delberäkning är gömd indikerar symbolen "..." att argumentet har gömda beräkningar.

2.5 Textuppgifter

I en textuppgift beskriver man först en situation, och ger sedan i uppgift att bevisa eller beräkna något i den här situationen. I en strukturerad uppgift beskrivs situationen av antagandena. I följande exempel har vi angett antagandena med bokstäver, så att vi enklare kan hänvisa till dem i härledningen. Den första uppgiften kommer från mekaniken.

Exempel 10. Sedan året 1960 har restiden för den snabbaste tågförbindelsen mellan Helsingfors och Villmanstrand förkortats med 37%. Beräkna hur många procent den genomsnittliga hastigheten då har ökat. Antag att tågbanans längd är oförändrad.

Först skriver vi om uppgiften genom att lägga till beteckningarna som vi använder i beviset. Den omskrivna uppgiften är följande: Efter år 1960 har restiden t' för det snabbaste tåget mellan Helsingfors och Villmanstrand förkortats med 37 procent jämfört med den ursprungliga restiden t. Beräkna med hur många procent p medelfarten v' har ökat jämfört med den ursprungliga medelfarten v. Vi antar att tågbanans längd s är oförändrad.

• Beräkna med hur många procent p farten har förändrats, då

$-$ $t' = 0,63 \cdot t$

$\Vdash$ {transitivitet, beräkna närmevärde}

p

$=$ {definitionen av förändringsprocent}

$$\frac{v' - v}{v}$$

$=$ {fysik: definitionen av medelfart $v = \frac{s}{t}$, där s är sträckan man har rört sig och t är restiden}

$$\frac{\frac{s}{t'} - \frac{s}{t}}{\frac{s}{t}}$$

$=$ {förenkla}

$$\frac{\frac{s}{t'}}{\frac{s}{t}} - 1$$

$=$ {förenkla bråken}

$$\frac{s \cdot t}{s \cdot t'} - 1$$

$=$ {förenkla, antaganden}

$$\frac{1}{0,63} - 1$$

$\approx$ {beräkna närmevärde}

$0,59$

$=$ {konvertera till procent: $x\% = \frac{x}{100}$}

59%

$\square$

Svar: medelfarten har ökat med 59%.

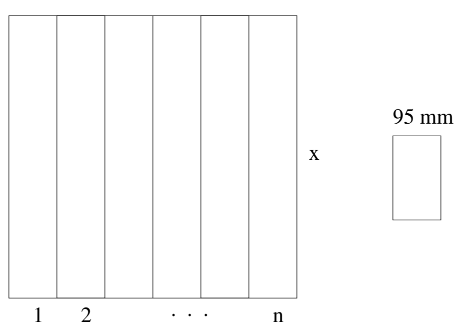
2.6 Frågor och svar

I en matematisk uppgift måste man ofta hitta ett värde x som uppfyller vissa givna villkor, eller så måste man hitta varje värde x som uppfyller de givna villkoren. Ekvationslösning är ett exempel på denna vanliga typen av uppgift. Ofta sägs det inte explicit med avseende på vilken variabel man skall lösa en ekvation, eftersom det är uppenbart (variabeln x), men om en ekvation har många variabler och konstanter så kan en uppgift i den här formen vara tvetydig.

I strukturerade härledningar kan vi beskriva en uppgift mer exakt när vi efter $\bullet$ - symbolen anger vilken variabel vi letar efter och vilka villkor den bör uppfylla. Svaret ges efter $\square$ - symbolen.

Exempel 14 En planka har bredden 95 mm och längden 1,6 m. Den sågas i bitar med samma längd, som placeras bredvid varandra så att de bildar en kvadrat. Vilken är kvadratens maximala sidlängd?

Låt n vara antalet bitar, $n \in \mathbb{Z}_+$, och låt x vara bitarnas längd. Då gäller det att $nx \leq 1600$, där längdenheten är millimeter. Vi vet också att $x = 95n$, eftersom bitarna bildar en kvadrat. Vi beskriver situationen i figur 2.1 (notera att en bit kan bli över) .



Figur 2.1: Kvadraten och den överblivna biten.

Nu vill vi maximera värdet på x.

- Beräkna $n \in \mathbb{Z}_+$ som maximerar värdet $x = 95n$ och uppfyller villkoret $nx \leq 1600$

$\Vdash$ n maximerar värdet $x = 95n$, och $nx \leq 1600$ och $n \in \mathbb{Z}_+$

$\equiv$ {förenkla villkoret}

- Förenkla $nx \leq 1600$, då

  \- $x = 95n$

  $\Vdash$ $nx \leq 1600$

  $\equiv$ {använd antagandet $x = 95n$}

  $n \cdot 95n \leq 1600$

  $\equiv$ {förenkla}

  $n^2 \leq 1600/95$

  $\equiv$ {lös genom att anta att $n \in \mathbb{Z}_+$; $16 \leq \frac{1600}{95} < 25$}

  $n \leq 4$

  $\square$

$\ldots$ n maximerar värdet $x = 95n$, och $n \leq 4$ och $n \in \mathbb{Z}_+$

$\equiv$ {x är en strängt växande funktion av n}

$n = 4$

$\square$ $n = 4$

Med andra ord, den största möjliga kvadraten är $4 \cdot 95 = 380$ (mm).

Kapitel 3

Att lösa ett problem steg för steg

I föregående kapitel visade vi hur strukturerade uppgifter används för att lösa enkla matematiska uppgifter. När en lösning blir längre och mer komplicerad behöver vi emellertid metoder som tillåter oss att dela upp lösningen i mindre delar. Dessutom behöver vi en tydlig strategi för hur man ska lösa en uppgift.

Inom matematik finns tre grundläggande strategier för att lösa mer komplicerade problem steg för steg: algebraiska beräkningar, framåtgående bevis och bakåtgående bevis. Vi har visat i föregående kapitel hur man löser problem med beräkningar. I ett framåtgående bevis räknar vi upp en följd av fakta som följer från antagandena och tidigare fakta och som hjälper med förståelsen och lösningen av problemet. Vi fortsätter tills vi har samlat så många fakta att vi kan lösa problemet direkt, med en beräkning eller genom ett slutligt faktum. Bakåtgående bevis börjar från det ursprungliga problemet och försöker reducera detta till enklare problem och lösa dessa, antingen direkt, eller genom att reducera dem till ännu enklare problem, osv.

Strukturerade uppgifter gör det möjligt att använda alla de här bevisstrategierna samtidigt, i olika delar av en lösning. I det här kapitlet visar vi hur man använder framåtgående och bakåtgående bevis i strukturerade uppgifter.

3.1 Framåtgående bevis

Då vi löser en uppgift har vi ofta en situation där vi inte direkt ser hur vi skall beräkna det önskade resultatet. Vi behöver förbereda beräkningen först genom att räkna upp några *fakta* som följer från antagandena och som vi behöver för att utföra beräkningarna. Vi skriver ett faktum på följande sätt:

$+$ {motivering}

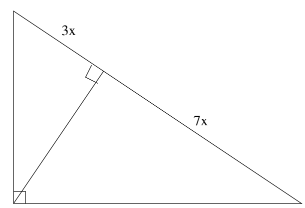
påstående

Vi markerar ett faktum med ett ”+”-tecken, till skillnad från antaganden som vi markerar med ett ”−”-tecken. Ett faktum bör alltid komma med en motivering som förklarar hur faktumet följer från antagandena och tidigare fakta. Motiveringen skrivs före faktumet. Motiveringen kan vara enkel eller så kan den bygga på deluppgifter. Fakta kan numreras, och då skrivs siffrorna i hakparenteser (t.ex. “[1]”, “[2]” osv.).

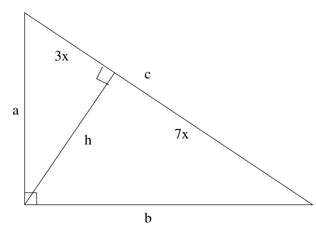
Först visar vi med ett exempel hur man kan använda fakta för att lösa en uppgift.

Exempel 11 Höjden mot hypotenusan i en rätvinklig triangel delar hypotenusan i förhållandet 3 : 7. Beräkna förhållandet mellan kateternas längder.

Vi börjar med att rita en figur, som beskriver problemet:



I nästa figur har vi namngett kateterna (a och b), hypotenusan (c) och höjden (h).



Vi använder de här beteckningarna i beviset. Vi skriver själva beviset enligt följande modell. Först skriver vi ner några enkla fakta, som följer direkt från figuren. Baserat på dessa kan vi bevisa några andra fakta. Slutligen beräknar vi förhållandet mellan kateternas längder utgående från dessa fakta.

• Beräkna förhållandet $\frac{a}{b}$

[1] {från figuren}

$c = 10x$

[2] {figuren och Pythagoras sats}

$h^2 + 9x^2 = a^2$

[3] {figuren och Pythagoras sats}

$h^2 + 49x^2 = b^2$

[4] {figuren och Pythagoras sats}

$a^2 + b^2 = 100x^2$

[5] {eliminera h}

- $[2] \wedge [3]$

$\equiv$ {observation [2] och [3]}

$h^2 + 9x^2 = a^2 \wedge h^2 + 49x^2 = b^2$

$\Rightarrow$ {subtrahera den första ekvationen från den andra ekvationen och förenkla}

$b^2 - a^2 = 40x^2$

□

... $b^2 - a^2 = 40x^2$

[6] {Beräkna b^2}

- $[4] \wedge [5]$

$\equiv$ {observation [4] och [5]}

$a^2 + b^2 = 100x^2 \wedge b^2 - a^2 = 40x^2$

$\Rightarrow$ {slå ihop ekvationerna}

$2b^2 = 140x^2$

$\equiv$ {dividera båda leden med 2}

$b^2 = 70x^2$

□

... $b^2 = 70x^2$

[7] {Beräkna a^2}

- $[4] \wedge [6]$

$\equiv$ {observation [4] och [6]}

$a^2 + b^2 = 100x^2 \wedge b^2 = 70x^2$

$\Rightarrow$ {sätt in den andra ekvationen i den första ekvationen}

$a^2 + 70x^2 = 100x^2$

$\equiv$ {lös a^2}

$a^2 = 30x^2$

□

... $a^2 = 30x^2$

$\Vdash$ $\frac{a}{b}$

$=$ {kvadratrotens definition, a och b är positiva tal}

$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$

$=$ {observation [6] och [7]}

$\sqrt{\frac{30x^2}{70x^2}}$

$=$ {reducera och förenkla}

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\square$

Följande exempel från den analytiska geometrin visar också hur man använder fakta i uppgifter. I det här exemplet markerar vi antaganden med bokstäver och fakta med siffror.

Exempel 12. Beräkna den punkt på parabeln $y = x^2 - 2x - 3$, där den riktade vinkeln hos tangenten är 45°.

Vi kan omformulera problemet på följande sätt: Beräkna punkten (x_0, y_0) på parabeln $y = x^2 - 2x - 3$ där den riktade vinkeln α hos tangenten är 45°.

- Beräkna punkten (x_0, y_0), då

(a) $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ för varje $x \in \mathbb{R}$, och

(b) den riktade vinkeln hos tangenten i punkten (x_0, y_0) är $\alpha = 45°$

[1] {beräkna derivatan i punkten x_0}

- tangenten till parabeln i punkten (x_0, y_0) har den riktade vinkeln 45°

$\equiv$ {riktningskoefficienten k ges av den riktade vinkeln α med formeln $k = \tan\alpha$}

tangentens riktningskoefficient i punkten (x_0, y_0) är $\tan 45°$

$\equiv$ $\{\tan 45° = 1\}$

tangenten har riktningskoefficienten 1 i punkten (x_0, y_0)

$\equiv$ {derivatan av funktionen ger riktningskoefficienten}

$f'(x_0) = 1$

$\square$

$\ldots$ $f'(x_0) = 1$

[2] {beräkna värdet på variabeln x_0, observation [1]}

$\bullet$ $f'(x_0) = 1$

$\equiv$ {antagande (a), beräkna derivatan}

$2x_0 - 2 = 1$

$\equiv$ {lös x}

$x_0 = \frac{3}{2}$

$\square$

$\ldots$ $x_0 = \frac{3}{2}$

$\Vdash$ (x_0, y_0)

$=$ {observation [2]}

$\ldots$ $\left(\frac{3}{2}, y_0\right)$

$=$ {beräkna värdet på y_0 med hjälp av antagande (a)}

$\left(\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 3\right)$

$=$ {räkna}

$\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

$\square$

Punkten vi söker är alltså $(x_0, y_0) = (\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$.

Den allmänna formen för en strukturerad uppgift med fakta ser ut på följande sätt.

•	Uppgift
-	antagande_1
$\vdots$	
-	antagande_m
$+$	{motivering av faktumet}
	faktum_1
$\vdots$	
$+$	{motivering av faktumet}
	faktum_m
$\Vdash$	{motivering för varför härledningen är en lösning till uppgiften med de givna antagandena och fakta}
	t_0
$\sim_1$	{motivering av påståendet $t_0 \sim_1 t_1$}
	t_1
$\sim_2$	{motivering av påståendet $t_1 \sim_2 t_2$}
	t_2
$\vdots$	
	t_{n-1}
$\sim_n$	{motivering av påståendet $t_{n-1} \sim_n t_n$}
	t_n
$\square$	

3.2 Bakåtgående bevis

Bakåtgående bevis kräver inte nya mekanismer, vi kan utföra dem med deluppgifter. Vi visar två exempel, där vi löser den givna uppgiften genom att reducera den ursprungliga uppgiften direkt till deluppgifter. Då behöver vi inte göra beräkningar på huvuduppgiftens nivå, och vi kan utelämna dem.

Den första exemplet är ett fallbevis. I den här typen av bevis identifierar vi först varje möjligt fall, sedan visar vi att vårt påstående är sant i varje enskilt fall. Det är viktigt att de fall som vi behandlar omfattar varje möjlighet.

Exempel 16. Bevisa att olikheten $|x+1| > 1$ är sann utanför intervallet $[-2,0]$.

• Visa att $|x+1| > 1$, då

(*a*) $x > 0 \vee x < -2$

$\Vdash$ {fallbevis, enligt antagandet (a) är det tillräckligt att kontrollera fallen $x > 0$ och $x < -2$ var för sig}

- • Visa att $|x + 1| > 1$, då
- $-$ $x > 0$
- $\Vdash$ $|x + 1|$
- $=$ {definition av absolutvärde, antagandet $x > 0$}
- $x + 1$
- $>$ {antagande}
- $0 + 1$
- $=$ {räkna}
- 1
- $\square$
- • Visa att $|x + 1| > 1$, då
- $-$ $x < -2$
- $\Vdash$ $|x + 1|$
- $=$ {absolutvärdets definition, antagandet $x < -2$}
- $-(x + 1)$
- $=$ {förenkla}
- $-x - 1$
- $>$ {antagandet $x < -2$ dvs. $-x > 2$}
- $2 - 1$
- $=$ {räkna}
- 1
- $\square$

$\square$

Induktionsbevis är ett annat exempel där det lönar sig att reducera ett problem. I ett induktionsbevis behandlar vi två fall: basfallet och induktionssteget. Om vi kan bevisa båda stegen så är påståendet sant.

Exempel 14. Bevisa att

$$0 + 1 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

för $n \in \mathbb{N}$ med hjälp av induktion.

Vi bevisar det här på följande sätt:

$\bullet$ Visa att $0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ för $n \in \mathbb{N}$

$\Vdash$ {induktionsbevis}

  $\bullet$ Basfall: visa att $0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, då

  $-$ $n = 0$

  $\Vdash$ $0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

  $\equiv$ {sätt in antagandet $n = 0$}

  $0 = \frac{0(0+1)}{2}$

  $\equiv$ {multiplicera med noll}

  T

  $\square$

  $\bullet$ Induktionssteg: visa att $0 + 1 + \ldots + n' = \frac{n'(n'+1)}{2}$, då

  $-$ $n' = n + 1$ och

  $-$ $0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

  $\Vdash$ $0 + 1 + \ldots + n'$

  $=$ {antagande}

  $0 + 1 + \ldots + n + (n + 1)$

  $=$ {induktionsantagande}

  $\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$

  $=$ {beräkna en gemensam nämnare}

  $\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

  $=$ {distributiva lagen, kommutativa lagen}

  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

  $=$ {antagandet $n' = n + 1$}

  $\frac{n'(n'+1)}{2}$

  $\square$

$\square$

Kapitel 4

Strukturerade härledningar

En *strukturerad härledning* är en följd av härledningssteg, där varje steg är antingen

- ett antagande,
- en deklaration,
- ett faktum,
- en definition eller
- en uppgift.

En strukturerad härledning är det traditionella sättet på vilket en matematiker arbetar med ett problem. Först försöker vi formulera problemet i matematisk form. När vi gör detta inser vi behovet av mer exakta antaganden, och kanske även några ytterligare antaganden. På samma sätt kanske vi behöver införa några nya begrepp, som vi definierar för att förenkla problemet. Nu kan vi fokusera på att lösa problemet. När vi har löst det ursprungliga problemet, ser vi kanske att det leder till andra intressanta resultat, som vi också kan studera i samma sammanhang. Dessa kräver ytterligare antaganden och nya definitioner och leder till nya problem, osv.

Matematiska resonemang byggs upp lite på samma sätt som en roman, med en tydlig berättelse och en eller flera höjdpunkter. Skillnaden är att varje steg måste bevisas vara korrekt, eftersom ett enda fel kan förstöra hela strukturen.

En strukturerad härledning ger mera frihet än strukturerade uppgifter när vi löser matematiska problem:

- Vi kan definiera nya begrepp före vi formulerar uppgifter och fakta som använder de här begreppen.
- Vi kan lösa flera uppgifter under samma antaganden, fakta och definitioner.
- Vi behöver inte presentera varje antagande genast, vi kan lägga till nya antaganden när de behövs.

Strukturerade härledningar generaliserar alla de konstruktioner som vi har beskrivit tidigare. En strukturerad uppgift är ett specialfall av en strukturerad härledning, en som bara har en uppgift. Ett enskilt antagande, beteckning, faktum eller definition är också ett specialfall av en strukturerad härledning.

4.1 Definitioner

Den allmänna formen för en definition är:

+ Definiera $c_1 \in A_1, \ldots, c_m \in A$

  {motivering}

  definitionsvillkor

Det här definierar nya konstanter $c_1 \in A_1, \ldots, c_m \in A_m$, som vi sedan kan använda i den fortsatta härledningen. Motiveringen bör visa att vi (under de givna antagandena och tidigare fakta) kan ge värden för konstanterna som uppfyller definitionsvilkoret. En definierad konstant kan vara enkel, som ett reellt tal eller ett heltal, men den kan också vara en funktion.

Vi kan använda definitioner också i strukturerade uppgifter, på samma sätt som fakta. De kan vara användbara när vi behöver t.ex. en kortare beteckning för något komplicerat koncept. Vanligtvis har en definition emellertid ett mera allmänt syfte. Vi använda den inta bara för att lösa ett problem, utan mera allmänt då vi analyserar någon teori eller modell. Då är definitionen en naturlig del av den allmänna utvecklingen av teorin och beskrivs bäst som ett steg i en strukturerad härledning.

Exempel 15. Vi definierar följden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ på följande sätt:

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

då $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Visa att (A) $0 < a_n < \frac{1}{2}$ då $n \geq 1$, att (B) $a_{n+1} > a_n$ då $n \geq 0$ och (C) beräkna $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Vi löser den här uppgiften med en strukturerad härledning. Vi identifierar uppgifterna med stora bokstäver, A, B och C.

+ Definiera $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

  {Funktionen a beskriver en följd, då vi betecknar $a_i = a(i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Den här följden är väldefinierad, eftersom $2n + 1 > 0$ då $n = 0, 1, 2, \ldots$ }

  $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ då $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

A. Visa att $0 < a_n < \dfrac{1}{2}$, då

\- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$\Vdash$ $0 < a_n < \dfrac{1}{2}$

$\equiv$ {definition a_n}

$$0 < \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}$$

$\equiv$ {multiplicera båda leden med $2n + 1$, skriv dubbelolikheten som en konjunktion}

$$0 < n \wedge n < \frac{2n+1}{2}$$

$\equiv$ {enkelt}

$$0 < n \wedge 2n < 2n + 1$$

$\equiv$ {enligt antagandet är $n \geq 1$, så det första påståendet är sant; det andra påståendet är alltid sant}

T

$\square$

B. Visa att $a_{n+1} > a_n$, då

\- $n \in \mathbb{N}$

$\Vdash$ $a_{n+1} > a_n$

$\equiv$ {definition a_n}

$$\frac{n+1}{2(n+1)+1} > \frac{n}{2n+1}$$

$\equiv$ {enkelt}

$$\frac{n+1}{2n+3} > \frac{n}{2n+1}$$

$\equiv$ {multiplicera med $(2n + 3)(2n + 1)$, vilket är positivt enligt antagandet}

$$(2n + 1)(n + 1) > (2n + 3)n$$

$\equiv$ {enkelt}

$$2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + 3n$$

$\equiv$ {subtrahera $2n^2 + 3n$ från båda leden}

$$1 > 0$$

$\equiv$ $\{$aritmetik$\}$

T

$\square$

C. Definiera $\lim_{n\to\infty} a_n$

$\Vdash$ $\lim_{n\to\infty} a_n$

$=$ $\{$enligt definitionen$\}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1}$

$=$ $\{$dividera både täljaren och nämnaren med n $\}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}$

$=$ $\{$enkelt$\}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\frac{1}{n}}$

$=$ $\{\dfrac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty\}$

$\dfrac{1}{2}$

$\square$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$ ■

4.2 Modellering

Strukturerade härledningar är användbara då vi vill modellera någon situation och sedan ställa frågor om modellen. Vi återkommer till uppgiften som vi presenterade tidigare,m tågförbindelsen mellan Helsingfors och Villmanstrand igen, men nu använder vi en strukturerad härledning. Det här betyder att vi först konstruerar en modell som beskriver uppgiften och sedan börjar vi lösa frågor relaterade till modellen.

Då man modellerar är det ofta bra att ange hur vi betecknar olika storheter. Vi introducerar beteckningar i en *deklaration,* av formen

$+$ $c_1 \in A_1, \ldots, c_m \in A$

Det här säger att vi inför nya konstanter kallade $c_1, \ldots, c_m$ i härledningen, där konstanten c_1 har ett värde som tillhör mängden A_1, konstanten c_2 tillhör mängden A_2 osv.

Vi kan tolka en deklaration som ett specialfall av en definition, där vi endast anger den definierade konstantens namn och värdemängd. Vi kan begränsa konstantens värde senare med ytterligare antaganden, om det behövs.

Exempel 16. Sedan året 1960 har restiden för den snabbaste tågförbindelsen mellan Helsingfors och Villmanstrand förkortats med 37%. Beräkna hur många procent den genomsnittliga hastigheten då har ökat. Antag att tågbanans längd är oförändrad.

Vi börjar med att namnge konstanterna som vi använder för att beskriva uppgiften.

\+ $s \in \mathbb{R}$ − avståndet mellan Helsingfors och Villmanstrand

\+ $t \in \mathbb{R}$ − den ursprungliga restiden

\+ $t' \in \mathbb{R}$ − den nuvarande restiden

Vi kan skriva kommentarer i en härledning efter "−" tecknet. Här hjälper kommentarerna oss komma ihåg vad storheterna beskriver i det ursprungliga problemet.

Vi behöver inte skriva en strukturerad härledning som ett enda stycke, utan vi kan lägga till text mellan stegen som här, för att göra det lättare att förstå hur lösningen framskrider.

Sedan skriver vi antagandena:

(a) $t' = 0.63 \cdot t$

(b) $s > 0, t > 0, t' > 0$

Notera antagandena som vi lade till, som säger att s, t, t' alla är större än noll. Det här följer från uppgiftens definition. Eftersom $s > 0$ så kan restiden inte vara noll.

Vi definierar hastigheten på normalt sätt:

[1] Definiera $v \in \mathbb{R}$ − den ursprungliga medelhastigheten

$\{v$ är väldefinierad, eftersom $t > 0\}$

$$v = \frac{s}{t}$$

[2] Definiera $v' \in \mathbb{R}$ − den nuvarande medelhastigheten

$\{v'$ är väldefinierad, eftersom $t' > 0\}$

$$v' = \frac{s}{t'}$$

Vi definierar förändringsprocenten på följande sätt:

[3] Definiera $p \in \mathbb{R}$ – hastighetens förändringsprocent

$\{p$ är väldefinierad: eftersom $s, t > 0$ så är $v > 0\}$

$$p = \frac{v' - v}{v}$$

Nu kan vi lösa uppgiften:

• p

$=$ {definition [3]}

$$\frac{v' - v}{v}$$

$=$ {definition [1] och [2]}

$$\frac{\frac{s}{t'} - \frac{s}{t}}{\frac{s}{t}}$$

$=$ {förenkla}

$$\frac{\frac{s}{t'}}{\frac{s}{t}} - 1$$

$=$ {förenkla bråken}

$$\frac{s \cdot t}{s \cdot t'} - 1$$

$=$ {förenkla, antagande}

$$\frac{1}{0,63} - 1$$

$\approx$ {beräkna närmevärde}

$0,59$

$=$ {konvertera till procent: $x\% = \frac{x}{100}$}

59%

□

Svar: medelfarten har ökat med 59%.

En strukturerad härledning är ett bättre sätt att presentera ett matematiskt resonemang än en strukturerad uppgift då resonemanget är långt och det finns ett behov av att förklara vad de olika stegen i härledningen används till.

Kapitel 5

Härledningar och logik

Ett centralt inslag i en strukturerad härledning är användningen av logiska uttryck och regler i matematiska bevis och härledningar. Logik är naturligtvis en viktig del av varje bevis, men den används ofta på ett informellt sätt. I strukturerade härledningar används logiska beteckningar systematiskt och de logiska regler som utnyttjas anges explicit. Vi kan då göra beräkningar med logiska uttryck på samma sätt som vi idag gör med aritmetiska och algebraiska uttryck.

5.1 Logiska påståenden

Vi har samlat de logiska beteckningar som vi använder i strukturerade härledningar i en tabell 5.1. Beteckningarna är rätt vanliga, även om vi har gjort några förändringar. Implikation kan också betecknas "$\rightarrow$" och för ekvivalens finns även beteckningarna "$\Leftrightarrow$" och "$\leftrightarrow$". Konjunktion betecknas ibland med "&" och disjunktion med "|". Universalkvantorn betecknas ibland med "Ax" och existenskvantorn med "Ex".

Vi har redan använt logiska beteckningar i tidigare exempel. I själva verket kräver gymnasiematematik en hel del logik både för att presentera och för att manipulera

Tabell 5.1: Loogiska symboler och operationer

T	:	*sant*, ett sant påstende (true)
F	:	*falskt*, ett falskt påstående (false)
$\neg p$	:	*negatio*n, påståendet $\neg p$ är falskt om p är sant, och sant om p är falskt
$p \wedge q$	:	*konjunktio*n, påståendet är sant om p och q är båda sanna
$p \vee q$	:	*disjuktio*n, påståendet är sant om p eller q (eller båda) är sanna
$p \Rightarrow q$	:	*implikatio*n, om p är sant, så är också q sant
$p \equiv q$	:	*ekvivalens*, p är lika sant som q
$(\forall x : p\,(x))$	:	*universalkvanttor*n, $p(x)$ är sant för varje värde för variabeln x
$(\exists x : p\,(x))$	:	*existenskvanttor*n, $p(x)$ är sant för något värde för variabeln x

matematiska påståenden. Vi visar först hur vi behöver logik i gymnasiematematiken redan då löser en andragradsekvation.

Exempel 6. Lös ekvationen $7x^2 - 6x = 0$.

Följande strukturerade härledning löser ekvationen:

$\bullet$ Lös ekvationen $7x^2 - 6x = 0$

$\Vdash$ $7x^2 - 6x = 0$

$\equiv$ $\{$distributiva lagen: $a\,(b + c) = ab + ac\}$

$x\,(7x - 6) = 0$

$\equiv$ $\{$nollregeln: $ab = 0 \equiv (a = 0 \vee b = 0)\}$

$x = 0 \vee 7x - 6 = 0$

$\equiv$ $\{$lös den andra ekvationen$\}$

$x = 0 \vee x = \frac{6}{7}$

$\square$

I härledningen skriver vi om det logiska påståendet $7x^2 - 6x = 0$ med hjälp av steg som bevarar ekvivalensen mot till $x = 0 \vee x = \frac{6}{7}$,. Det senare uttrycket visar direkt vilka två värden för variabeln x som uppfyller ekvationen (variabeln x uppfyller ekvationen då dess värde är 0 eller $\frac{6}{7}$). Varje steg motiveras med en regel. I första steget använder vi t.ex. den distributiva lagen för multiplikation, $a\,(b + c) = ab + ac$. Vi använder den här regeln i steget

$$7x^2 - 6x = 0 \quad \equiv \quad x\,(7x - 6) = 0,$$

dvs. den omskrivna ekvationen är ekvivalent med den ursprungliga ekvationen.

Det är värt att notera att vi ger lösningen till ekvationen som en disjunktion. Vi har visat att ekvationen $7x^2 - 6x = 0$ är lika sann som ekvationen $x = 0 \vee x = \frac{6}{7}$. En ekvation ett logiskt påstående som kan vara sant för vissa värden på variabeln x och falskt för andra värden på x.

Vi kan också använda strukturerade härledningar när vi uttrycker påståenden med naturligt språk. Följande exempel beskriver det här.

Exempel 7. Visa att $k^2 + k$ är ett jämnt tal, för varje heltal k.

Här är ett enkelt bevis av påståendet:

$\bullet$ Visa att $k^2 + k$ är ett jämnt tal, då

\- k är ett heltal

$\Vdash$ talet $k^2 + k$ är jämnt

$\equiv$ {distributiva lagen}

talet $k\,(k + 1)$ är jämnt

$\equiv$ {en produkt är jämn om en av faktorerna är jämn}

talet k är jämnt $\vee$ talet $k + 1$ är jämnt

$\equiv$ {ett av två på varandra följande tal är alltid jämnt}

T

$\square$

I exemplet använder vi naturligt språk i logiska påståenden som ”$k^2 + k$ är ett jämnt tal”.

Uppgiften var att bevisa att påståendet ”$k + k$ är ett jämt tal” är sant. Vi uttrycker det här på följande sätt

$$(k^2 + k \text{ är ett jämnt tal}) \equiv T,$$

med andra ord, påståendet ”$k^2 + k$ är ett jämnt tal” är ekvivalent med sanningsvärdet T. Om vi vill bevisa påståendet med hjälp av en beräkning så bör vi skriva påståendet som en ekvivalens. Eftersom $p \Rightarrow T$ alltid är sant räcker det med att visa att påståendet $T \Rightarrow p$ är sant.

Följande exempel beskriver hur vi kan använda logiska regler när vi löser problem på gymnasienivå.

Exempel 9. I en rätvinklig triangel är hypotenusans längd 15 cm, och omkretsen är 36 cm. Beräkna kateterna längder.

I härledningen använder vi Pythagoras sats $a^2 + b^2 = c^2$, där a och b är kateterna och c är hypotenusan. Vi kan beräkna omkretsen på det vanliga sättet som summan av sidornas längder, dvs. $a + b + c$.

$\bullet$ Beräkna sidornas längder i triangeln, då

(a) triangeln är rätvinklig och har kateterna a och b och hypotenusan c

(b) $\quad c = 15$ (cm)

(c) $\quad$ triangelns omkrets är 36 (cm)

$\Vdash$ $\quad T$

$\equiv$ $\quad$ {Pythagoras sats, antagande (a)}

$\quad a^2 + b^2 = c^2$

$\equiv$ $\quad$ {antagande (b) och (c)}

$\quad a^2 + b^2 = 15^2 \wedge a + b + 15 = 36$

$\equiv$ $\quad$ {lös den andra ekvationen med avseende på b}

$\quad a^2 + b^2 = 15^2 \wedge b = 21 - a$

$\equiv$ $\quad$ {sätt in b från den andra ekvationen i den första ekvationen, $15^2 = 225$}

$\quad a^2 + (21 - a)^2 = 225 \wedge b = 21 - a$

$\equiv$ $\quad$ {beräkna $(21 - a)^2$}

$\quad a^2 + 441 - 42a + a^2 = 225 \wedge b = 21 - a$

$\equiv$ $\quad$ {förenkla den första ekvationen}

$\quad 2a^2 - 42a + 216 = 0 \wedge b = 21 - a$

$\equiv$ $\quad$ {lös andragradsekvationen}

- $2a^2 - 42a + 216 = 0$

  $\equiv$ {rotformeln}

  $a = \frac{-(-42) \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 2 \cdot 216}}{2 \cdot 2}$

  $\equiv$ {förenkla}

  $a = \frac{42 \pm \sqrt{1764 - 1728}}{4}$

  $\equiv$ {förenkla}

  $a = \frac{42 \pm 6}{4}$

  $\equiv$ {förenkla}

  $a = 9 \vee a = 12$

  $\square$

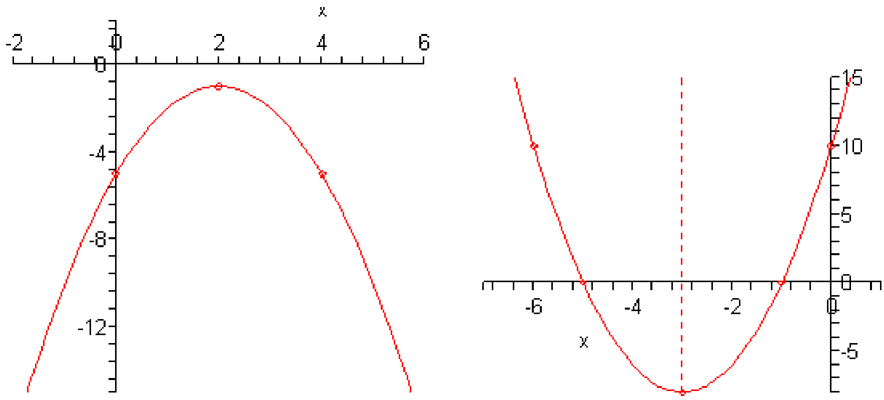
$\ldots$ $\quad (a = 9 \vee a = 12) \wedge b = 21 - a$

$\equiv$ $\quad$ {distributiva lagen: $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$}

$\quad (a = 9 \wedge b = 21 - a) \vee (a = 12 \wedge b = 21 - a)$

$\equiv$ $\quad$ {sätt in värdet på variabeln a i ekvationen för b}

Figur 5.1: A parabel som öppnar sig uppåt och neråt



$$
\begin{array}{ll}
 & (a = 9 \wedge b = 21 - 9) \vee (a = 12 \wedge b = 21 - 12) \\
\equiv & \{\text{förenkla}\} \\
 & (a = 9 \wedge b = 12) \vee (a = 12 \wedge b = 9)
\end{array}
$$

$\square$

Svaret visar att kateternas längder är 9 cm och 12 cm.

Vi började beviset med påståendet T. Eftersom vi vet att Pythagoras sats är sann så kan vi använda antagande (a) för att visa att

$$T \equiv a^2 + b^2 = c^2$$

Sedan visar vi att $a^2 + b^2 = c^2$ är ekvivalent med påståendet $(a = 9 \wedge b = 12) \vee (a = 12 \wedge b = 9)$. Eftersom T är sant så måste påståendet som vi får som resultat vara sant, och vi har löst uppgiften.

5.2 Kvantorer i gymnasiematematiken

Nästa uppgift är ett exempel på en mera utmanande härledning, där vi utnyttjar universalkvanttorn för att formulera problemet.

Exempel 8. För vilka värden på konstanten a är funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alltid negativ, då $f(x) = -x^2 + ax + a - 3$ för varje x?

I det här fallet kräver lösandet av huvuduppgiften att vi löser två deluppgifter (beräkna diskriminanten D_f och beräkna dess nollställen). I resonemanget använder vi kurvorna i figur 5.1, som är parabler som öppnar sig uppåt och neråt.

Vi löser uppgiften med hjälp av en strukturerad härledning på följande sätt.

- Beräkna för vilka värden på a funktionen f alltid är negativ, då

- $f(x) = -x^2 + ax + a - 3$ för varje $x \in \mathbb{R}$

$\Vdash$ $\left(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0\right)$

$\equiv$ {grafen till funktion f är en parabel som öppnar sig neråt då andragradstermens koefficient är negativ; en sådan graf är alltid negativ om den saknar nollställen (figuren till vänster)}

$\left(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 \neq 0\right)$

$\equiv$ {en andreagradsekvation saknar nollställen om diskriminanten D_f är mindre än noll}

$D_f < 0$

$\equiv$ {sätt in diskriminantens värde D_f}

- Beräkna diskriminanten värde D_f

  $\Vdash$ D_f

  $=$ { diskriminanten av $Ax^2 + Bx + C = 0$ ges av formeln $B^2 - 4AC$}

  $a^2 - 4(-1)(a-3)$

  $=$ {förenkla}

  $a^2 + 4a - 12$

  $\square$

... $a^2 + 4a - 12 < 0$

$\equiv$ {grafen till funktionen definierad av uttrycket $a^2 + 4a - 12$ är en parabel som öppnar sig uppåt då andragradstermens koefficient är positiv, därmed är grafen negativ mellan nollställena (figuren till höger)}

- Beräkna nollställena till polynomet $a^2 + 4a - 12$

  $\Vdash$ $a^2 + 4a - 12 = 0$

  $\equiv$ {rotformeln}

  $a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$

  $\equiv$ {lös}

  $a = 2 \vee a = -6$

  $\square$

... $-6 < a < 2$

$\square$

Därmed har vi bevisat att

$$\left(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0\right) \equiv -6 < a < 2.$$

Med andra ord är funktionen f negativ om och endast om $-6 < a < 2$.

I strukturerade härledningar kan vi fritt använda logiska påståenden och logiska inferensregler när vi motiverar likheten mellan påståenden. I detta fall behövde vi allkvantorn för att formulera problemet. Vi kan också använda extra material, såsom figurer, tabeller eller andra typer av stöd i strukturerade härledningar. I det föregående exemplet hänvisade vi till två figurer i beviset. Tilläggsmaterial presenteras utanför beviset, men det kan hänvisas till i härledningen. Vi utnyttjar även parablers allmänna egenskaper i beviset.

I exemplet har vi bevisat ekvivalens mellan påståendena. Om vi endast bevisar implikationen åt höger

$$(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0) \Rightarrow -6 < a < 2,$$

så kan villkoren för konstanten a vara för svaga, vi kunde få extra värden som inte uppfyller de ursprungliga villkoren. Om vi å andra sidan endast visar att

$$\big(\forall x : -x^2 + ax + a - 3 < 0\big) \Leftarrow -6 < a < 2,$$

så är det möjligt att vi inte hittar varje värde på konstanten a som uppfyller de ursprungliga villkoren. Vi använder ekvivalens för att visa att villkoren uppfylls för de beräknade värdena på konstanten a och endast för dessa värden.

5.3 Exakta bevis

I tidigare bevis har motiveringarna för stegen har varit ganska fria. Om vi vill göra bevis logiskt exakta är det viktigt att nämna vilken regel som vi har använt i varje steg. Vi bör även nämna hur vi har använt regeln och motivera varför vi kan använda regeln i detta sammanhang.

Låt oss studera den distributiva lagen, som är en typisk regel från algebran:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Det här gäller för varje aritmetiskt uttryck x,y och z. Här är x,y och z så kallade metavariabler (eller syntaktiska variabler), som vi ersätter med konkreta uttryck då vi använder regeln.

Vi kan skriva den exakta motiveringen av ett steg i ett bevis i formen

$$\{\mathit{namn} : \mathit{regel}, \text{ där } \mathit{substitution}, \text{ villkor } \mathit{antagande} \text{ gäller}\}$$

I motiveringen

- nämns regelns namn (*namn*),

- skrivs själva regeln ut vid behov (*regel*),
- beskriver vi hur vi använder regeln (dvs. vilka värden som sätts in istället för den syntaktiska variabeln) (*substitutioner*) och
- vi konstaterar att *antagandena* för regelns användning är uppfyllda.

Vi kan skriva en mera exakt motivering av ett steg där vi använder den distributiva lagen i formen:

$(a-b)\,(a+b)$

$=$ {distributiva lagen för addition: $x\,(y+z) = xy + xz$, där $x := a-b$, $y := a$, $z := b$, villkoret att $a-b$, a och b är aritmetiska uttryck gäller}

$(a-b)\,a + (a-b)\,b$

Här är $x := a-b$, $y := a$ och $z := b$ substitutioner som vi använder i regeln. Därmed tillämpar vi den distributiva lagen så att vi väljer $a-b$ som variabel x, a som variabel y och b som variabel z. Vi konstaterar också att vi kan använda regeln eftersom varje uttryck är aritmetiskt. Efter att vi substituerat får vi ett specialfall av den distributiva lagen:

$$(a-b)(a+b) = (a-b)a + (a-b)b$$

Vi kan skriva regeln direkt i motiveringen, som vi har gjort tidigare, eller så kan vi endast skriva namnet på regeln. Vi utelämnar ofta substitutionen om det framgår från bevissteget vilken substitution vi har använt. På samma sätt kan vi utelämnar villkoren om de är uppenbara från sammanhanget. Då kan vi skriva mycket korta motiveringar för bevisstegen,

$(a-b)(a+b)$

$=$ {distributiva lagen för addition}

$(a-b)a + (a-b)b$

Läsaren arbete blir då att lägga till nödvändiga detaljer, dvs. vad regeln faktiskt säger och vilken substitution vi har använt. Dessutom måste läsaren kontrollera att antagandena för att använda regeln gäller.

Exempel 17. Vi bevisar konjugatregeln på nytt, men den här gången använder vi bara axiom för reella tal. Vi använder delhärledningar i beviset för att ge det samma struktur som det tidigare beviset, dvs. bevisen de har samma huvudsteg.

$\bullet$ Visa att $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, med hjälp av axiomen för reella tal

$\Vdash$ {transitivitet}

$(a-b)(a+b)$

$=$ {bevisa med hjälp av axiom}

$\ldots$ $a^2 + (-ba) + ba + \left(-b^2\right)$

$=$ {bevisa med hjälp av axiom}

$\ldots$ $a^2 - b^2$

$\square$

I det här beviset är delhärledningarna gömda, så att vi ser bevisets övergripande struktur. Delhärledningen i det första steget är följande:

$\bullet$ Bevisa att $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ med hjälp av axiom

$\Vdash$ $(a-b)(a+b)$

$=$ {distributiva lagen för addition: $x(y+z) = xy + xz$, där $x := a-b$, $y := a$, $z := b$}

$(a-b)a + (a-b)b$

$=$ {kommutativa lagen: $xy = yx$, där $x := a-b$, $y := a$}

$a(a-b) + (a-b)b$

$=$ {kommutativa lagen: $xy = yx$, där $x := a-b$, $y := b$}

$a(a-b) + b(a-b)$

$=$ {definition av subtraktion: $x - y = x + (-y)$, där $x := a$, $y := b$}

$a(a+(-b)) + b(a+(-b))$

$=$ {distributiva lagen för addition: $x(y+z) = xy + xz$, där $x := a$, $y := a$, $z := -b$}

$aa + a(-b) + b(a+(-b))$

$=$ {distributiva lagen för addition: $x(y+z) = xy + xz$, där $x := b$, $y := a$, $z := -b$}

$aa + a(-b) + ba + b(-b)$

$=$ $\{$kommutativa lagen: $xy = yx$, där $x := a$, $y := -b\}$

$aa + (-b)\,a + ba + b\,(-b)$

$=$ $\{$multiplikation by additiva inversen: $(-x)\,y = -\,(xy)$, där $x := b$, $y := a$ and $y := b\}$

$aa + (-ba) + ba + (-bb)$

$=$ $\{$definition av potensen x^2: $x^2 = xx$, där $x := a$ och $x := b\}$

$a^2 + (-ba) + ba + \left(-b^2\right)$

$\square$

Delhärledningen i det andra steget är följande:

- Bevisa att $a^2 + (-ba) + ba + \left(-b^2\right) = a^2 - b^2$ med hjälp av axiom

$\Vdash$ $a^2 + (-ba) + ba + \left(-b^2\right)$

$=$ $\{$summan av motsatta tal: $-x + x = 0$, där $x := ba\}$

$a^2 + 0 + \left(-b^2\right)$

$=$ $\{$addera noll: $x + 0 = x$, där $x := a^2\}$

$a^2 + \left(-b^2\right)$

$=$ $\{$definitionen av subtraktion: $x - y = x + (-y)$, där $x := a^2$, $y := b^2\}$

$a^2 - b^2$

$\square$

Det här mer exakta beviset är mycket längre eftersom varje steg endast utnyttjar axiom för reella tal.

Kapitel 6

Det allmänna formatet för en strukturerad härledning

En strukturerad härledning har följande allmänna format

***härledning*:**

härledningssteg$_1$

härledningssteg$_2$

$\vdots$

härledningssteg$_n$

Med andra ord, en härledning är en följd av härledningssteg. Ett enskilt steg i härledningen är antingen ett antagande, en deklaration, ett faktum, en definition eller en (strukturerad) uppgift:

***härledningssteg*:**

antagande | *deklaration* | *faktum* | *definition* | *uppgift*

En (strukturerad) uppgift beskriver en matematikuppgift och dess lösning. En uppgift har följande allmänna form:

***uppgift*:**

•	*fråga*
-	*antagande*
$\vdots$	
-	*antagande*
$+$	*deklaration*
	motivering
	påstående
$\vdots$	
$+$	*deklaration*
	motivering
	påstående
$\Vdash$	*motivering*
	uttryck
rel	*motivering*
	uttryck
$\vdots$	
rel	*motivering*
	uttryck
$\square$	*svar*

***motivering*:**

{*förklaring*}

uppgift

$\vdots$

uppgift

I en *definitionen* ingår varje del: deklaration, motivering och påstående. I ett *faktum* lämnar vi bort deklarationen. I en deklaration lämnar vi igen bort motiveringen och påståendet. En strukturerad beräkning är ett specialfall av en strukturerad uppgift som varken har frågor, antaganden, deklarationer, fakta eller definitioner och inget svar. Vi lämnar också bort $\Vdash$-tecknet och den efterföljande motivering från beräkningen.

Notera att i en strukturerad uppgift, så definieras *uppgiften* med hjälp av *motiveringar* och en *motivering* definieras med hjälp av *uppgifter*. Formatet för härledningarna är alltså *rekursivt.* Det här betyder att en uppgift kan innehålla deluppgifter, som i sin tur kan innehålla deluppgifter, osv. I praktiken bör man undvika att ha för många deluppgifter, eftersom det gör lösningen för svår att läsa.

Formatet för strukturerade härledningar som vi presenterade ovan lämnar de konkreta detaljerna obestämda. Det här är avsiktligt, eftersom tanken är att dessa bestäms av den logiska teori vi utnyttjar, den önskade nivån av precision, samt av den underliggande matematiska teorin. Om vi vill ha en helt fast syntax för strukturerade härledningar, bör vi ännu definiera hur man skriver följande delar av en härledning:

- *antagande* — logiskt påstående
- *påstående* — logiskt påstående
- *förklaring* — en förklaring till varför ett steg i en härledning är riktigt
- *uttryck* — uttryck som tillåts av den använda teorin
- *rel* — relationen mellan uttrycken
- *fråga* – vilken är uppgiften
- *svar* – svaret på uppgiften
- *deklaration* – nya namn på konstanter som vi introducerar

Vi lämnar dock dessa kategorier odefinierade så att vi kan välja det presentationsformat vi vill ha, beroende på vilken utbildningsnivå vi använder härledningen, vilken gren av matematiken vi tillämpar metoden på och med vilken precision vi uttrycker logiken vi använder .

Kapitel 7

Mera information

Strukturerade härledningar beskrivs mer allmänt och mer i detalj i boken

> *Teaching Mathematics in the Digital Age with Structured Derivations* (Ralph-Johan Back, Four Ferries Publishing, 2016).

En kortare version av den här boken är

> *Structured Derivations: Teaching Mathematical Reasoning in High School* (Ralph-Johan Back, Four Ferries Publishing, 2015),

som fokuserar på metodens användning på gymnasienivå och i högstadiet. Båda böckerna är tillgängliga från t.ex. Amazon.

Den intresserade läsaren kan också bekanta sig med *eMath*, en digital läroboksserie för lång matematik i gymnasiet som vi författat:

> *eMath MAG 1 - MAA 10* (Ralph-Johan Back, Stefan Asikainen, Matti Hutri, Joonatan Jalonen, Antti Lempinen, Marie Linden-Slotte, Saara Mäkinen, Petri Sallasmaa, Petri Salmela, Four Ferries Publishing 2016).

Bokserien visar på ett konkret sätt hur vi kan lära ut matematik med hjälp av strukturerade härledningar. Bokserien är tillgänglig på iPad pekplattor från AppStore och på Android pekplattor från Google Play.

4f Studio läromgivningen stöder skrivandet av strukturerade härledningar på dator. Systemet inkluderar ett elektroniskt häfte, där man kan skriva matematisk text, skapa och redigera strukturerade härledningar och göra grafer till funktioner, geometriska figurer och matematiska tabeller. *Four Ferries* webbsidor (*www.fourferries.fi*) ger mera information om 4f Studio. Där hittar du självhjälpguider om strukturerade härledningar och digital matematikundervisning såväl som utbildningsvideor och information om forskning och utveckling av strukturerade härledningar och praktiska erfarenheter av användningen av metoden på olika utbildningsnivåer.

Introduktion till strukturerade härledningar

Strukturerade härledningar är en metod för att underlätta konstruktion, presentation och förståelsen av matematiska argument. Metoden är lämplig för matematiska bevis och algebraiska och aritmetiska beräkningar såväl som för geometriska konstruktioner och allmän problemlösning. Metoden kan användas då en lösning till ett problem kräver flera steg efter varandra. Den har använts på olika nivåer av matematikundervisning, från högstadienivå till universitetsnivå och tillämpad forskning. Metoden baserar sig på ett fast format för att presentera matematiska argument och användning av enkel logik. Det fasta formatet gör det enklare att förstå bevis och beräkningar och att kontrollera att de är korrekta. Målet med den här guiden är att visa hur strukturerade härledningar kan användas vid undervisning av matematik i gymnasiet. Metoden beskrivs med exempel, som steg för steg utvidgar metoden med nya funktioner och koncept.

ISBN 978-952-7147-04-7

4Ferries
www.fourferries.com